

Faces | C. Ikam | L.F. Fléri | T. Muller – Nov 2014

Informatique Graphique

Thomas Muller || thomas.muller@kalyx.org

Avant-propos

Ce document est un support de cours d'introduction à l'informatique graphique 3D délivré au niveau Master et Mastère spécialisé. Il donne pas à pas, et en suivant une approche naturelle, les notions fondamentales de mathématique, de physiologie de la vision, de physique et d'optique liées au calcul d'images de synthèse par ordinateur. Parallèlement les principales techniques de modélisation et les algorithmes de rendu y sont explicités.

Table des matières

| | |
|--|----|
| AVANT-PROPOS | 3 |
| Table des matières | 3 |
| GÉNÉRALITÉS | 5 |
| INTRODUCTION | 7 |
| <i>Rapide survol historique</i> | 7 |
| <i>Loi de Moore</i> | 9 |
| <i>Equipement informatique</i> | 10 |
| ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUES | 11 |
| NOTIONS DE BASE | 13 |
| <i>Déterminants</i> | 13 |
| <i>Repères</i> | 14 |
| <i>Vecteurs</i> | 14 |
| <i>Points</i> | 15 |
| EQUATIONS 3D ÉLÉMENTAIRES | 16 |
| <i>Droite</i> | 16 |
| <i>Plan</i> | 16 |
| <i>Sphère</i> | 16 |
| <i>Tore</i> | 16 |
| TRANSFORMATIONS..... | 17 |
| RÉSOLUTION D'UN SYSTÈME DE N ÉQUATION LINÉAIRES À N INCONNUES..... | 13 |
| LUMIÈRE COULEUR ET PERCEPTION | 19 |
| LA LUMIÈRE | 21 |
| <i>Nature</i> | 21 |
| <i>Equations de Maxwell</i> | 22 |
| <i>Notion de Spectres</i> | 23 |
| LA COULEUR..... | 27 |
| <i>L'œil humain</i> | 27 |
| <i>Les espaces de couleurs</i> | 28 |
| <i>Traitement informatique de la couleur</i> | 30 |
| MATIÈRE | 33 |
| THÉORIE & GÉNÉRALITÉS | 35 |
| <i>BRDF</i> | 35 |
| <i>Réflexion & réfraction</i> | 35 |
| <i>Réflexion sur une surface rugueuse</i> | 37 |
| <i>Réflexions en milieux hétérogènes</i> | 39 |
| MODÉLISATION 3D | 43 |
| <i>Représentation des solides et des fluides</i> | 45 |
| <i>Organisation de la scène</i> | 50 |

| | |
|---|-----------|
| PRISE DE VUE | 53 |
| PROJECTION SUR LE PLAN IMAGE | 55 |
| <i>Modèle du sténopé</i> | 55 |
| <i>Projections perspectives</i> | 55 |
| <i>Projection parallèle</i> | 56 |
| VISUALISATION EN MODE FILAIRE | 57 |
| ÉLIMINATION DES PARTIES CACHÉES | 58 |
| <i>Algorithme du peintre</i> | 58 |
| <i>Z buffer</i> | 59 |
| <i>Scan Line</i> | 59 |
| <i>Optimisation : élimination des faces non visibles</i> | 60 |
| SHADING « LISSAGE » | 60 |
| <i>lissage de Gouraud</i> | 61 |
| <i>lissage de Phong</i> | 61 |
| SIMULATION D'ÉCLAIRAGE..... | 63 |
| EQUATION DU RENDU | 65 |
| ALGORITHMES DE SIMULATION D'ÉCLAIRAGE | 66 |
| <i>Lancer de rayons</i> | 66 |
| <i>Méthodes de Monte-Carlo</i> | 68 |
| <i>Photon Mapping</i> | 69 |
| <i>Radiosité</i> | 70 |
| ANNEXES..... | 75 |
| DÉFINITIONS GÉNÉRALES | 77 |
| <i>Angle solide</i> | 77 |
| <i>Caustique</i> | 77 |
| <i>Corps Noir</i> | 77 |
| <i>Diagramme Goniométrique</i> | 77 |
| <i>Gamma</i> | 77 |
| <i>Gamut</i> | 78 |
| <i>Goniophotomètre</i> | 78 |
| DÉFINITION DE RADIOMÉTRIE | 78 |
| <i>Bidirectional Reflectance Distribution Function (BRDF)</i> | 78 |
| <i>Flux</i> | 78 |
| <i>Intensité de rayonnement</i> | 79 |
| <i>Irradiance (EN) - Eclairage (FR)</i> | 79 |
| <i>Isotropie</i> | 79 |
| <i>Radiance (EN) - Luminance (FR)</i> | 79 |
| <i>Radiosité</i> : | 80 |
| <i>Réflectance</i> | 80 |
| DÉFINITION DE PHOTOMÉTRIE | 80 |
| <i>Photométrie</i> : | 80 |
| <i>Flux lumineux</i> : | 80 |
| <i>Intensité lumineuse</i> : | 81 |
| <i>Eclairage lumineux</i> : | 81 |
| <i>Luminance lumineuse</i> : | 81 |
| TABLEAU RÉCAPITULATIF. RADIOMÉTRIE/PHOTOMÉTRIE | 81 |

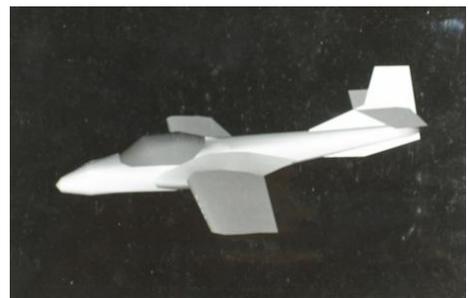
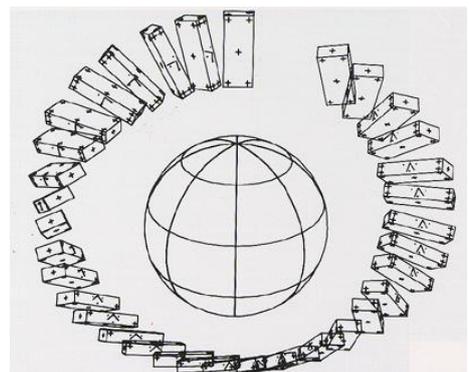
Généralités

Introduction

L'informatique graphique est une science jeune, elle s'applique à la création, manipulation et restitution d'images numériques. Elle inclue plusieurs axes d'étude dont la génération d'images à partir de descriptions géométriques, physiques et optique de scènes virtuelles observées sous des points de vu donnés. C'est cet aspect, la synthèse d'image 3D, que nous développons ici.

Rapide survol historique

- ~ -400 Camera obscura Mozi chine / Aristote Grèce
- 1450 Gutenberg Premier système d'imprimerie
- 1826 Première photographie par Nicéphore Niepce
- 1843 Ada Lovelace écrit le premier programme informatique
- 1926 Première télévision (J.L. Baird)
Première téléconférence entre Washington et New York
- 1938 Invention de la TV couleur
- 1941 Zuse Z3 - Allemagne - Premier ordinateur et première machine de Turing (relais).
- 1948 Invention du transistor
- 1948 ENIAC - USA - Deuxième ordinateur et première machine de Turing électronique
- 1951 Premier affichage graphique: Vectorscope sur l'ordinateur Whirlwind (MIT) 4Ko de RAM.
- 1955 SAGE premier système de contrôle aérien
- 1960 Wiliam Fetter (Boeing) utilise pour la première fois le terme de *Computer Graphics*
- 1961 Premier jeu vidéo développé au MIT
- 1962 P.Bézier propose un premier modèle de courbes et surfaces paramétrées
- 1963 Invention de la souris
Sketchpad de Sutherland: premier logiciel de CAO fonctionnant sur l'ordinateur XT-2 (320Kb de mémoire RAM)
Premier film généré par ordinateur par E. Zajac
- 1966 Invention des premiers écrans plasma
- 1967 Premier simulateur de vol (couleur et interactif) pour la Nasa
- 1968 Création d'Intel
Sutherland crée le premier casque de réalité virtuelle: head-mounted display
- 1971 Ombrage de Gouraud
- 1973 Le jeu pong est développé sur Atari
Premières conférences du SigGraph
Rich Riesenfeld (Syracuse) introduit les b-splines



1974 Protocole TCP (Vint Cerf, Bob Kahn) z-buffer développé par Ed Catmull (University of Utah)

1975 Ombrage de Phong
Premières fractal par Benoit Mandelbrot (IBM)
Fondation de Microsoft

1976 Jim Blinn développe l'environnement mapping
Fondation d'Apple
Premier frame buffer 24b/pixels

1977 Sortie du film Star Wars de G.Lucas

1978 Blinn introduit le Bump Mapping
Invention du premier vidéo disque laser

1980 Turner Whitted (Bell Labs) introduit l'algorithme du lancer de rayons.
Sortie du film Tron

1982 Tom Brighham introduit le morphing
Atari développe le data glove
AutoDesk est fondé et Autocad édité
Fondation de Adobe et Silicon Graphics

1983 Willams introduit le Mip-Mapping
1er lecteur de CD

1984 Goral présente l'algorithme de radiosité
Le lancé de rayon distribué, l'alpha-buffer et le motion blur sont développés par LucasFilms

1987 Format d'image GIF
Windows 2.0

1989 PIXAR commence le développement de RenderMan

1990 Windows 3.0

1991 Fondement d'Internet public HTTP (CERN)
Formats JPG et MPEG

1992 Début d'étude du CAVE par l'université de l'Illinois
Première version de la librairie graphique OpenGL

1995 Sortie du film Toy Story par Pixar

1996 Edition du jeu Quake
Henrik Wann Jensen publie l'algorithme de PhotonMapping

1997 Paul Debevec publie une technique pour capturer des images haute dynamique.

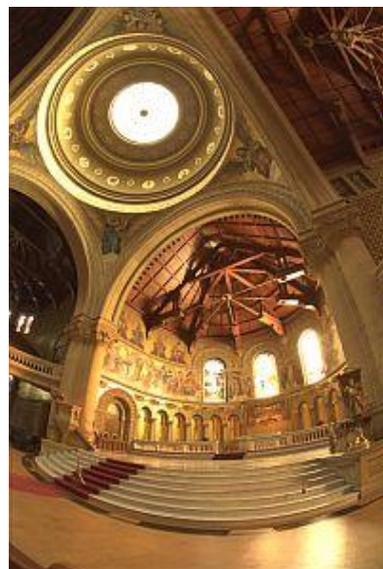
2001 Henrik Wann Jensen développe la première simulation de diffusion sub-surfacique
Premier processeur graphique programmable: Nvidia Geforce 3 (NV20) compatible DirectX 8.0 et introduction du Vertex Shader.

2004 OpenGL 2.0

2007 Introduction de Compute Unified Device Architecture: CUDA

2010 Kinect 1.0

2012 Oculus Rift



Loi de Moore

En 1975 Gordon E. Moore (co-fondateur d'Intel) constate que le nombre de transistor sur une puce de silicium double tous les deux ans à coût constant. La "loi" c'est vérifiée par la suite.

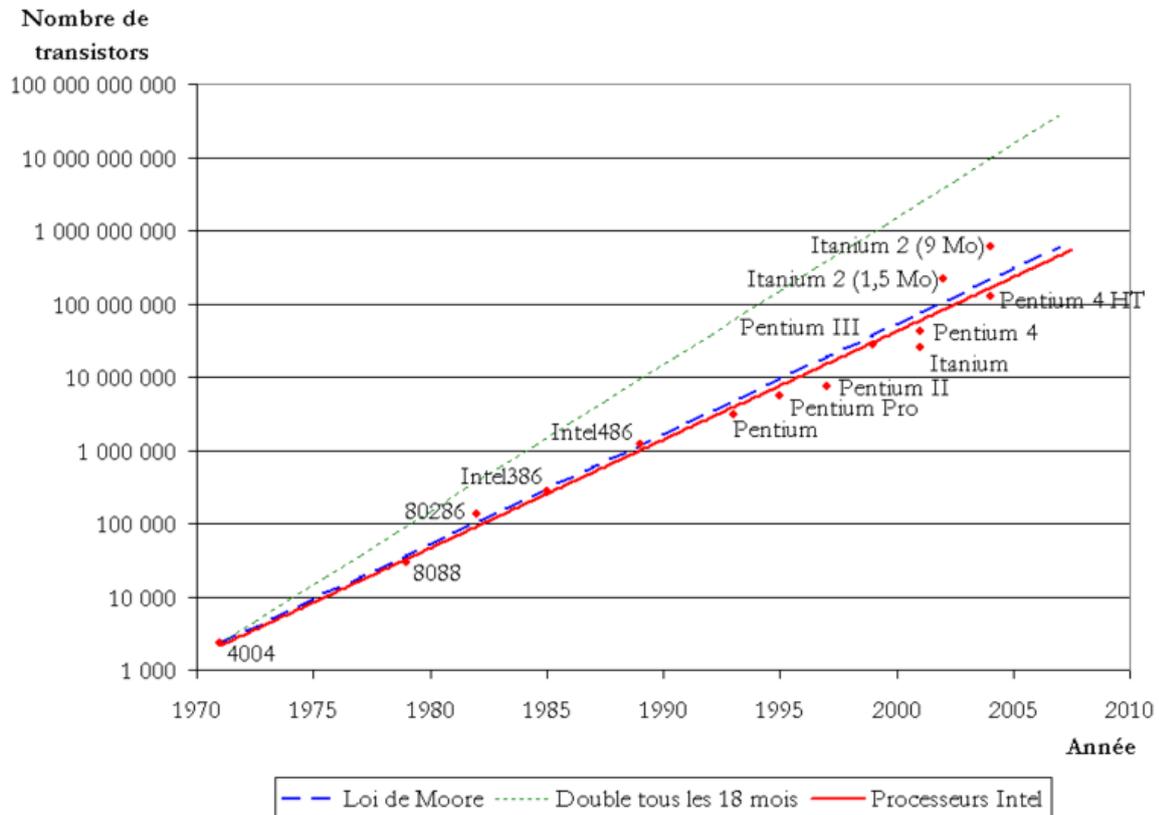


Figure 1: Loi de Moore

En 1945 l'ENIAC a coûté l'équivalent de 250 millions d'euros. A la fin des années 50 un ordinateur doté d'une puissance équivalente ne valait plus que 100 millions et 1 million en 1970. L'ENIAC avait alors une puissance de 100 kiloflops¹ (opérations à virgule flottante par seconde). Actuellement le supercalculateur le plus puissant au monde dépasse les 30 pétaflops (10^{15} flops). Un ordinateur personnel peut dépasser les 5 téraflopps (10^{12} flops), soit dix million de fois plus puissant que l'ENIAC.

¹ Uniquement en l'addition (357 flops en multiplication et 38 flops en division)

Equipement informatique

Pour la production d'images 3D nous disposons donc d'un équipement évoluant en capacité de calcul et/ou en précision années après années. Ces équipements sont constitués de calculateurs et de périphériques.

Les calculateurs, CPU, GPU, etc. sont architecturés suivant les principes de la "machine de Turing" doté d'un mécanisme d'interruption. Ils disposent d'opérations logiques simples, de l'addition, de la multiplication, etc. ainsi que d'opérations de transfert de données. Les instructions sont exécutées en chaîne exactement comme sur les anciennes machines à cartes perforées. Les calculs se font généralement sur des mots de 32 ou 64 bits (ou plus pour les processeurs graphiques). Les processeurs sont actuellement hautement parallélisables (ils possèdent généralement plusieurs corps). Ils fonctionnent à des fréquences pouvant aller jusqu'à 3 GHz (le record étant à 500GHz) et travaillent sur des données stockées en mémoire vive via des bus pouvant fonctionner à plus de 2GHz (Voir 6Ghz pour la mémoire graphique).

La capacité de traitement de cartes graphiques actuelles approche les 10 000 millions de triangles par secondes ce qui rend possible, en théorie, la manipulation interactive (30fps) d'un modèle composé de plus de 300 millions de triangles.

Parmi les périphériques, nous disposons de moniteurs (CRT, LCD, LED, Plasma, etc.) capables d'afficher 16 millions de couleurs, et plus pour les écrans haute dynamique (HDRI), et pouvant atteindre une résolution de 2560x1600 pixels. Nous disposons aussi de différents périphériques de pointage (souris, stylet, etc.), d'acquisition (scanner, photo numérique, etc.) et d'impression - y compris 3D -.

Les capacités de calcul que nous avons à disposition sont considérables mais on atteint encore rapidement les limites lorsque l'on souhaite représenter la réalité dans toute sa complexité.

Éléments de mathématiques

Notions de base

Dans les conditions matériel que l'on vient de définir nous nous proposons de représenter des scènes virtuels en mémoire et d'en donner un aperçu par le calcul sous forme d'image. Nous devons pour cela nous doter des outils mathématiques élémentaires nécessaires à la définition et à la manipulation de géométrie 3D ainsi qu'au calcul de phénomènes optiques simples.

Déterminants

Un déterminant est un outil mathématique servant entre autre à la résolution de systèmes linéaires (voir chapitre correspondant).

Dans le plan euclidien, pour deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} le déterminant se calcule simplement avec la formule suivante:

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} = u_x v_y - u_y v_x$$

En dimension 3 le déterminant peut se calculer en utilisant la règle de Sarrus: Soit 3 vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$. Former une matrice de dimension 3 à partir des vecteurs en colonne et répéter les deux premières colonnes puis effectuer les produits des diagonales, sommer les produits descendants et soustraire les produits montants

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x & u_x & v_x \\ u_y & v_y & w_y & u_y & v_y \\ u_z & v_z & w_z & u_z & v_z \end{bmatrix}$$

$$= u_x v_y w_z + v_x w_y u_z + w_x u_y v_z - w_x v_y u_z - u_x w_y v_z - v_x u_y w_z$$

Il est intéressant de noter que:

- Si tous les termes d'une ligne ou d'une colonne sont nuls alors le déterminant est lui-même égale à zéro.
- Si la matrice est triangulaire, alors le déterminant est égal au produit des coefficients diagonaux.
- Si la matrice est recombinaée linéairement suivant les lignes et/ou colonnes son déterminant n'est pas modifié.

Résolution d'un système de N équation linéaires à N inconnues

Dans plusieurs situations nous aurons à résoudre un système d'équations linéaires de N équations N inconnues. Une des méthodes utilisable est celle dite de l'élimination de Gauss-Jordan ou pivot de Gauss, mais nous proposerons une autre méthode, plus "computationnelle", appelée règle de Cramer.

Soit le système:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = \lambda_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = \lambda_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,n}x_n = \lambda_n \end{cases}$$

Qui peut se représenter sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow A \cdot X = \Lambda$$

Si $\det(A)$ est non nul, alors il existe une solution unique:

$$x_k = \frac{\det(A_k)}{\det(A)}$$

Où $\det(A_k)$ est le déterminant de la matrice formé en remplaçant la K-ième colonne de A par le vecteur colonne Λ

Repères

Il est nécessaire de pouvoir se situer dans le monde virtuel, on lui associe pour cela espace affine sur \mathbb{R}^3 , $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ que l'on appellera repère Monde. Nous serons aussi amenés à construire un repère pour l'œil ou la caméra représentant le point de vue et la direction de visée. De même chaque objet 3D peut posséder son propre repère local pour faciliter sa manipulation. Enfin l'écran est généralement muni d'un repère 2D.

Vecteurs

Nous aurons à manipuler la notion de vecteurs. Ils nous serviront à représenter des déplacements et des directions. Pour cela nous nous plaçons dans une espace vectoriel sur K, K étant un corps. C'est à dire que K est un ensemble munie de deux lois internes commutatives: addition et multiplication, et dont la multiplication est distributive pour l'addition. En informatique graphique le corps K est le plus souvent l'ensemble des nombres réels \mathbb{R} . Un espace vectoriel est un espace à N dimensions ici 2, 3 ou 4. On dira alors qu'il est défini sur, respectivement, \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 ou \mathbb{R}^4 . Il est lui même muni de deux lois: La somme vectorielle (interne) et la multiplication par un scalaire (élément de K) (externe à gauche).

Rappels :

Soit $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ des vecteurs

$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ est la norme de \vec{v}

$\text{Dir}(\vec{v})$ est la direction de \vec{v}

On se place dans un repère orthonormé en 3D.

Produit scalaire :

$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta$ où θ est l'angle entre \vec{u} et \vec{v}

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$$

Rem : si $|\vec{u}| = |\vec{v}| = 1$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos \theta$

si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ et $|\vec{u}| \neq 0$ et $|\vec{v}| \neq 0$ alors $\vec{u} \perp \vec{v}$

$\frac{(\vec{v} \cdot \vec{u}) \vec{u}}{(\vec{u} \cdot \vec{u})}$ Est la projection de \vec{v} sur \vec{u}

$\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$ Est le vecteur unitaire de même direction que \vec{u}

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$$

Produit vectoriel :

$|\vec{u} \wedge \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin \theta$ où θ est l'angle entre \vec{u} et \vec{v}

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} u_y & v_y \\ u_z & v_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_z & v_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix} = (u_y v_z - u_z v_y, u_z v_x - u_x v_z, u_x v_y - u_y v_x)$$

$\text{Dir}(\vec{u} \wedge \vec{v})$ est la direction perpendiculaire à la fois à \vec{u} et à \vec{v} dans le sens direct.

Rem : $|\vec{u} \wedge \vec{v}|$ est l'aire du parallélogramme construit sur \vec{u} et \vec{v}

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$$

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$$

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w}$$

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w}) \vec{u}$$

Points

Les points sont définis dans un repère (un espace affine donc) donné. Ils désignent de façon unique une position dans l'espace considéré. Comme les vecteurs ils sont caractérisés par leurs coordonnées. Les points servent, entre autre, à positionner les sommets des géométries dans l'espace.

Attention, les opérations définies pour les points ne sont pas les mêmes que celles définies pour les vecteurs.

Soit A et B deux points.

$$B - A = \overrightarrow{AB}$$

$$A + \overrightarrow{AB} = B$$

L'addition et la multiplication entre deux points ne sont pas disponibles.

Equations 3D élémentaires

Droite

Une droite est un espace à une dimension. Soit O son origine et \vec{d} sa direction alors la droite est définie par l'ensemble des points P tel que :

$$P = O + t\vec{d} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Équation 1 équation de la droite dans \mathbb{R}^3

Plan

Un plan est un espace 2D, il peut être défini par une origine O et deux vecteurs non colinéaires \vec{u} et \vec{v} par l'ensemble des points P tel que :

$$P = A + \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Équation 2 équation du plan dans \mathbb{R}^3

Une autre façon de définir un plan dans \mathbb{R}^3 est de le définir comme l'ensemble des points tel que :

$(P - A) \cdot \vec{n} = 0$ A étant un point du plan et \vec{n} une normale au plan.

Cette équation peut se réécrire sous la forme :

$$ax + by + cz + d = 0 \quad \text{avec } \vec{n} = (a,b,c), P = (x,y,z)$$

Équation 3 équation 2 du plan dans \mathbb{R}^3

Rem : d est la distance du plan à l'origine du repère ssi \vec{n} est unitaire.

Sphère

Une sphère de centre C et de rayon R a pour équation :

$$(P - C)^2 - r^2 = 0$$

Équation 4 équation de la sphère dans \mathbb{R}^3

Tore

Un tore formé autour de l'axe Z généré par un cercle de rayon r placé à une distance d de l'origine sur le plan xOy a pour équation :

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - d)^2 + z^2 - r^2 = 0$$

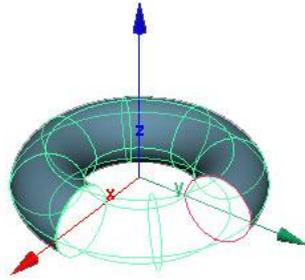


Figure 2 le tore

Transformations

Afin de représenter la géométrie d'une scène virtuelle nous aurons aussi besoin de transformations, que nous représenterons sous forme de matrices 4x4 en coordonnées homogènes.

Les points sont représentés sur 4 coordonnées x y z w avec $P=Q$ ssi $P_x/P_w=Q_x/Q_w$ et $P_y/P_w=Q_y/Q_w$ et $P_z/P_w=Q_z/Q_w$

De façon générale on fait en sorte que la coordonnée w soit égale à 1.

Les matrices de transformations sont de dimension 4x4

Translation de vecteur \vec{t}

$$T\vec{t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & tx \\ 0 & 1 & 0 & ty \\ 0 & 0 & 1 & tz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Homothétie

$$E\vec{e} = \begin{bmatrix} ex & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ey & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ez & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Translation inverse

$$T\vec{t}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -tx \\ 0 & 1 & 0 & -ty \\ 0 & 0 & 1 & -tz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Homothétie inverse

$$E\vec{e}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/ex & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/ey & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/ez & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotations

$$R_{\vec{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_{\vec{y}} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{\vec{z}} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

L'inverse d'une matrice de rotation est égale à sa transposée.

$R^{-1} = R^t$ (En effet $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ et $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$)

Toute rotations peut être représentée par une combinaison (non unique!) de 3 rotations sur \vec{x}, \vec{y} et \vec{z} .

Changement de repère

Considérons les repères $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $(P, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ alors

$$\begin{bmatrix} mi \\ mj \\ mk \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ui & vi & wi & Pi \\ uj & vj & wj & Pj \\ uk & vk & wk & Pk \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} mu \\ mv \\ mw \\ 1 \end{bmatrix}$$

Projection perspective

$$F\vec{f} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ fx & fy & fz & 0 \end{bmatrix}$$

Généralement on pose $fx=fy=0$ et $fz= 1/d$ pour une vue en direction des z négatifs, le plan de projection parallèle au plan xy passant par $(0,0,d)$ et le centre de projection en $(0,0,0)$.

Composition

Toute transformation peut s'exprimer par une combinaison de translation, rotation et changement d'échelle et donc grâce à une matrice homogène.

Lumière Couleur et Perception

Nature

La lumière dite visible est un phénomène électromagnétique. Elle se propage dans un corps ou dans le vide par radiation. En cela, elle est considérée comme une énergie. Une conception duale de la lumière a été définie par les chercheurs de ces derniers siècles. Ces deux natures sont complémentaires et indissociables.

Aspect ondulatoire

La lumière peut être considérée comme une onde de même nature que les rayons cosmiques ou les ondes radar. Elle se propage dans le vide à une vitesse de $\sim 300\,000$ km/s.

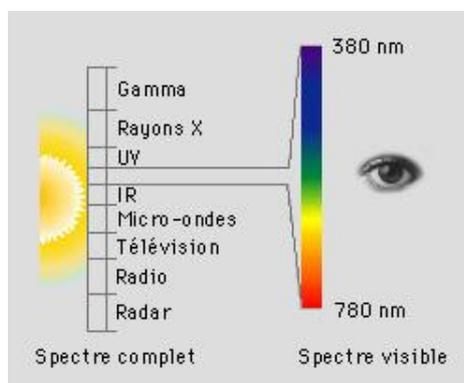


Figure 3 : Longueurs d'ondes du visible

Aspect corpusculaire

Ici la lumière correspond au déplacement de particules élémentaires, les photons. Les photons sont des particules d'énergie dépourvues de masse. Ils sont produits dans la matière par l'excitation (par un apport de chaleur par exemple) des électrons, qui en changeant d'orbital réémettent cette énergie sous forme de photons.

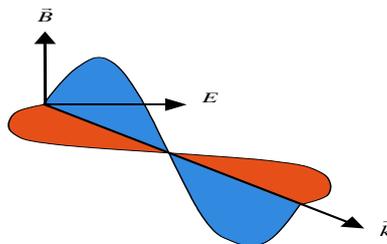


Figure 4 : La lumière : un phénomène électromagnétique

Equations de Maxwell

La théorie de l'électromagnétisme repose sur quatre équations fondamentales : les équations de Maxwell. Ces équations décrivent le comportement d'une onde électromagnétique, dans le vide ou dans un milieu matériel. Cette description possède une formulation plus simple dans le vide, car elle nécessite l'utilisation d'un moins grand nombre de grandeurs physiques nécessaires à la description du matériau traversé. C'est cette formulation qu'emploient généralement les modèles d'illumination.

Ainsi, la lumière est une énergie transportée par une paire de champs couplés :

- le champ électrique E ,
- le champ magnétique B .

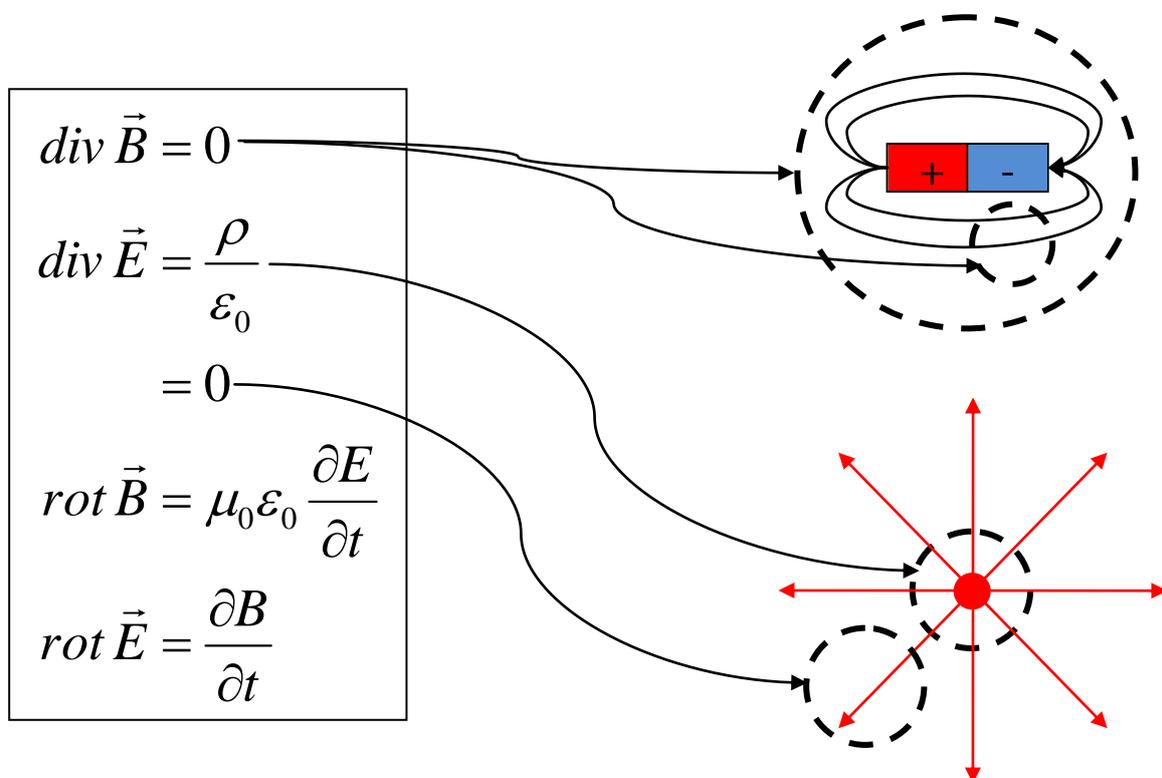
Ces champs sont liés à deux champs d'induction :

- un champ d'induction électrique (ou de déplacement électrique),
- un champ d'induction magnétique.

Ces quatre champs représentent quatre notions à manipuler, liées entre elles par les quatre équations de Maxwell.

Ces champs sont créés par la présence d'une charge en un point de l'espace et se manifestent en tout point du même espace. On est donc en présence d'un effet mutuel.

En tout point, les quatre équations de Maxwell décrivent localement l'état de ces champs.



Équation 5 : Maxwell dans le vide en l'absence de courant électrique

ρ Est la densité de charge

μ_0 Perméabilité magnétique du vide (ou constante magnétique)

ϵ_0 Permittivité diélectrique du vide (ou constante électrique)

La divergence (div) d'un champ en un point M de l'espace représente le différentiel du flux (par unité de volume) de ce champ en ce point. En d'autres termes le rapport entre le flux entrant et le flux sortant.

Le rotationnel (rot) exprime la tendance qu'ont les lignes de champ d'un champ vectoriel à tourner autour d'un point.

Ici les équations de Maxwell montrent que le rotationnel du champ magnétique est lié à la variation du champ d'induction électrique et vice-versa.

Notion de Spectres

On appelle spectre un ensemble de longueurs d'onde émis par une source ou réfléchi par un matériau. Un spectre peut être continu, discontinu, combiné ou de raies comme dans les exemples ci-dessous :

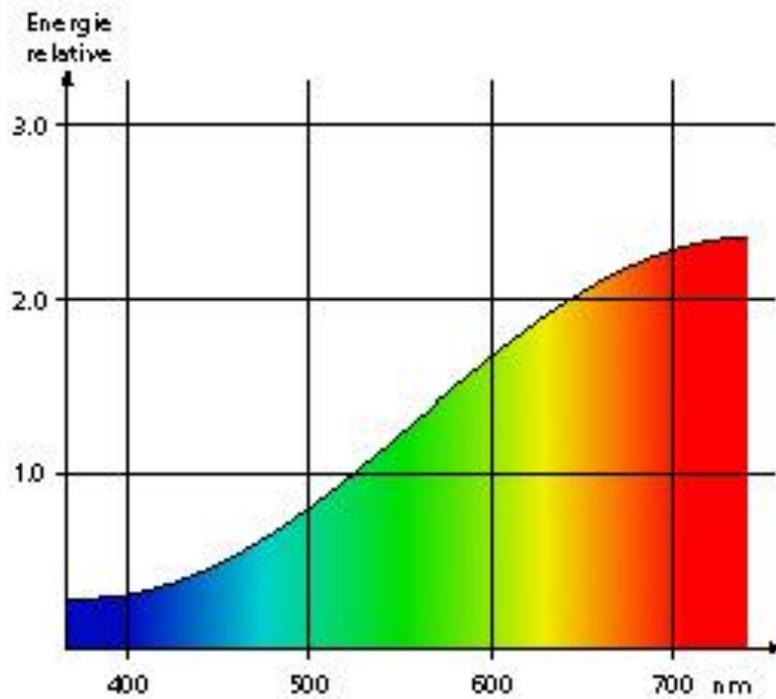


Figure 5 : Spectre continu, émis par une ampoule halogène

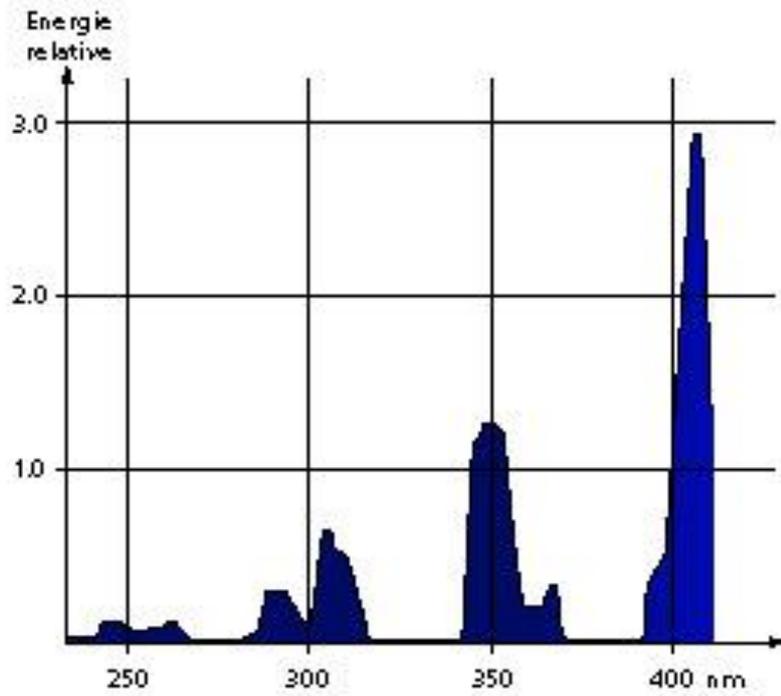


Figure 6 : Spectre discontinu d'une lampe aux vapeurs de mercure, émettant dans les UV

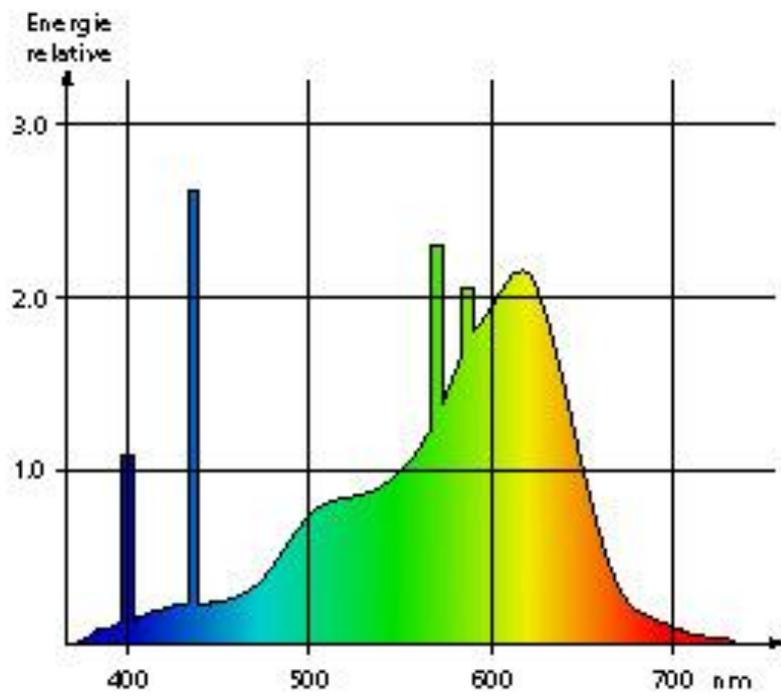


Figure 7 : Spectre combiné d'un tube fluorescent de type "Warm white"

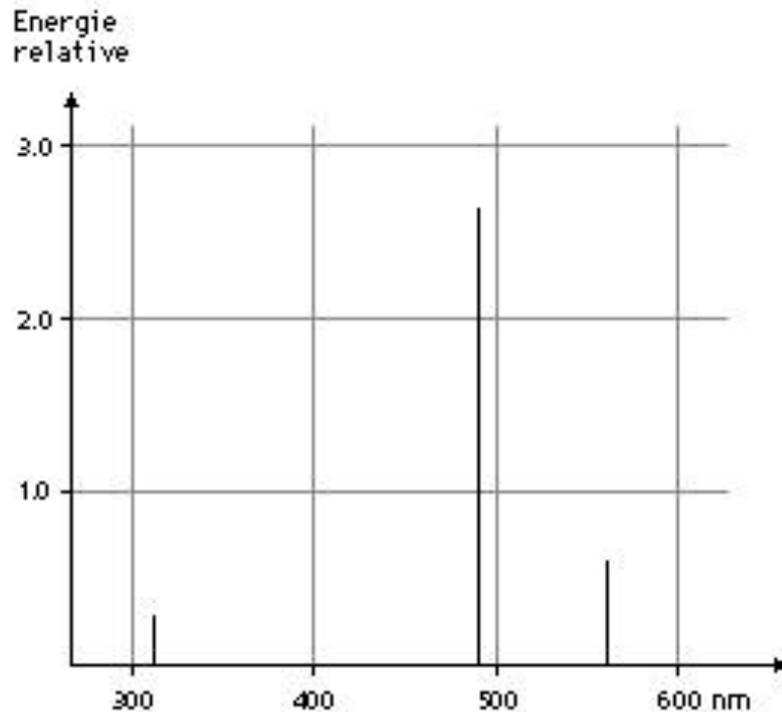


Figure 8 : Les 3 principales raies d'émission du laser Argon-ion

Normalisation

Un certain nombre de spectres d'émission ont été normalisés par la **CIE** (Commission Internationale de l'Éclairage). Ils sont donnés en degrés Kelvin et correspondent aux spectres émis par un "corps noir" à une température donnée. Par analogie, on peut assigner à toute source de lumière une température couleur en Kelvin.

Un Corps Noir émet la même quantité d'énergie pour toutes les longueurs d'ondes à une température de 5500 K. Au-dessus, l'émission est plus importante dans les courtes longueurs d'ondes ; Au-dessous, dans les grandes longueurs d'onde.

Quelques exemples :

Lampe à incandescence normale: 2500 K

Lampe halogène: 3400 K

Lumière du jour (photographie): 5500 K

Ecran du Macintosh: 7000 K

Télévision: 9000 K

Les spectres d'émission normalisés sont appelés Illuminants, ils permettent aux individus de comparer leurs travaux ou d'échanger des données (images, simulations ...) dans un cadre défini.

Les principaux illuminants sont :

Illuminant A: version normalisée de l'éclairage à incandescence

Illuminant B: représente la lumière directe du soleil

Illuminant C: lumière moyenne du jour, sans UV

Illuminant D65: lumière moyenne du jour, avec UV

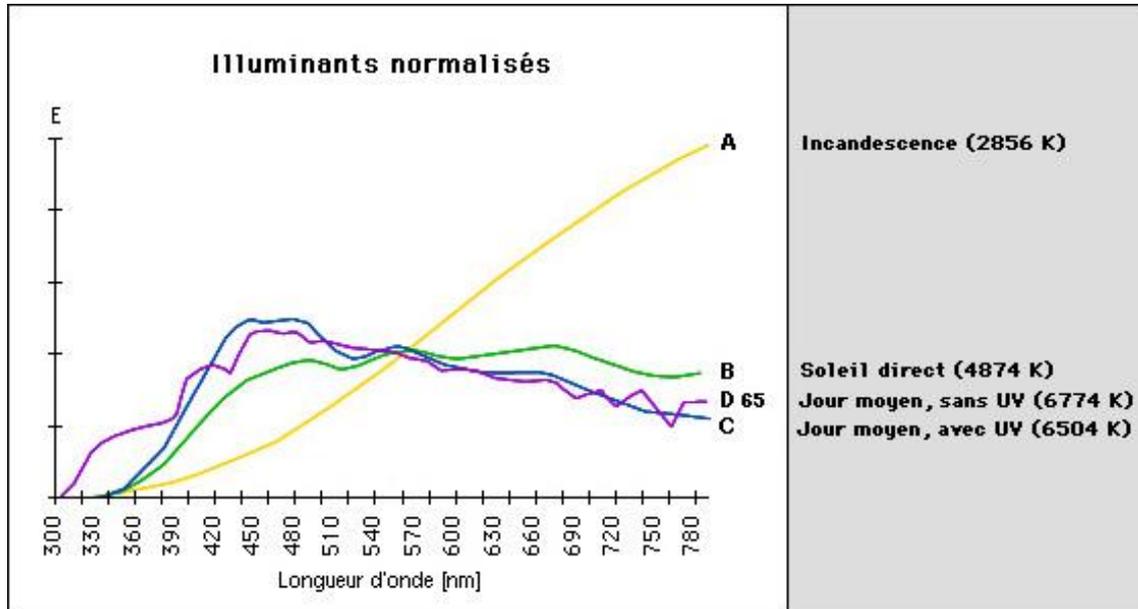


Figure 9 : Les illuminants

La couleur

La couleur est une sensation, elle n'existe qu'au travers de notre propre perception. En effet, le terme couleur n'a de sens que si l'on l'associe à l'organe qui la perçoit. En cela, cette notion est très subjective, elle nous est propre.

L'œil humain

Sans nous attarder sur l'anatomie de l'œil humain, dont voici un aperçu :

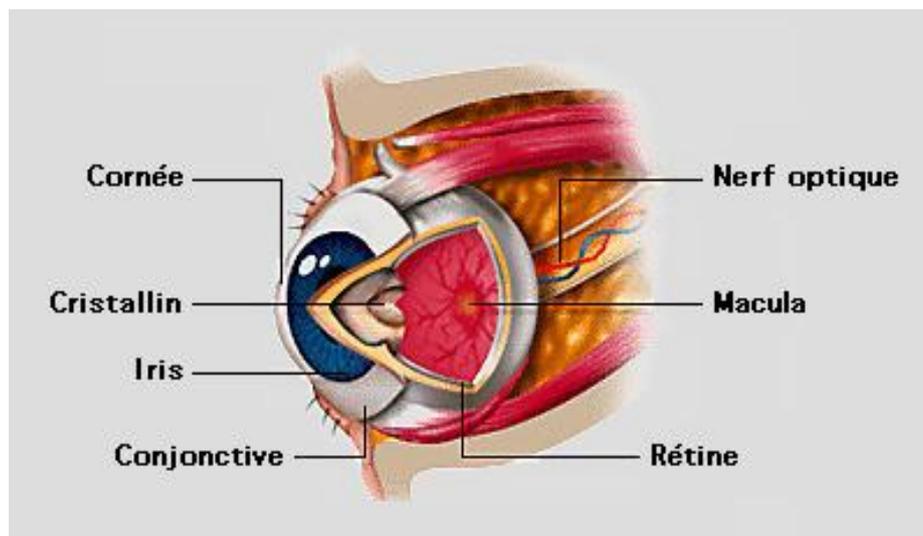


Figure 10 : Anatomie de l'œil humain

Expliquons d'où vient la sensation colorée :

Lorsque l'image virtuelle se forme sur le fond de la rétine, des cellules sensibles aux longueurs d'ondes du visible réagissent pour envoyer l'information au cerveau par le biais du nerf optique. Ces cellules sont les bâtonnets et les cônes.

Les bâtonnets ne sont sensibles que pour une faible luminosité. Ils ne fournissent qu'une information photométrique ; pour cette raison, nous ne percevons que très peu les couleurs la nuit.

Il existe trois types de **cônes** qui sont sensibles, grâce à leurs pigments, à des spectres donnés dont les maximums respectifs sont à ~510nm, ~560nm et ~620nm. Chacun de ces types de cônes génère une sensation colorée respectivement autour du bleu, du vert et du rouge. C'est la base de la couleur et de son aspect trichromatique.

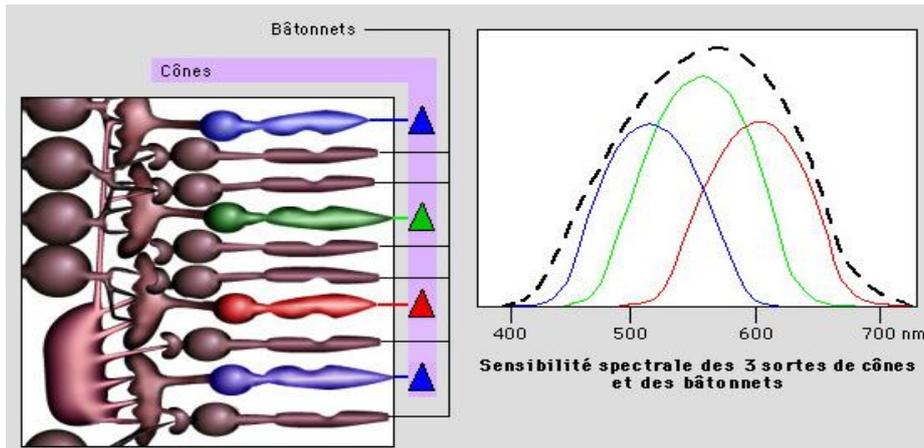


Figure 11 : Sensibilité spectrale des cônes et bâtonnets

Cela signifie qu'il n'y a pas bijection entre un spectre et la sensation colorée qu'il produit. En d'autres termes, une sensation colorée peut être produite par une infinité de sources lumineuses de spectres différents (Ces sources sont dites "métamères" ou "homochromes"). En contrepartie, toute sensation colorée produite par un spectre peut être exprimée à l'aide de trois composantes.

Les espaces de couleurs

Comme nous venons de le voir, tout spectre peut être réduit à un vecteur de trois valeurs lorsque l'on cherche à représenter la couleur. Intuitivement, on voudrait déterminer ce vecteur dans un repère Rouge Vert Bleu directement lié à la sensibilité des cônes. Cette méthode est couramment employée en informatique ou en vidéo sur les écrans CRT. Pourtant, ce repère présente un certain nombre de désavantages dus à sa non-uniformité face à la sensation colorée ; De plus, il ne permet pas de représenter toutes les couleurs du visible. La CIE a donc défini un certain nombre de repères mieux adaptés au travail des scientifiques ou des techniciens de la couleur. Tous ces repères se basent sur les sources fictives suivantes (pour lesquelles l'émission est parfois négative) :

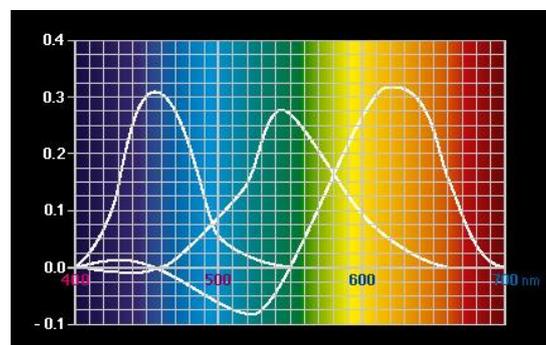


Figure 12 : Sources fictives idéales

CIE XYZ(1931)

Le système de coordonnées XYZ 1931 est la base de toute la colorimétrie moderne. Il se base directement sur les courbes ci-dessus. La transformation spectre vers XYZ est directement réalisée par une multiplication de matrice. Nous donnons la matrice de transformation en annexe pour un échantillon de 80 longueurs d'ondes.

Ce repère est défini de telle sorte que toutes les couleurs visibles puissent être définies par trois coordonnées strictement positives. Y étant la luminance, une couleur est généralement donnée sous la forme d'un triplet xyY tel que :

$$x = \frac{X}{X+Y+Z}$$
$$y = \frac{Y}{X+Y+Z}$$

Ce système de coordonnées est fortement non uniforme, et peut être représenté par le diagramme de chromaticité suivant où la troisième dimension Y (non représentée) serait la luminance.

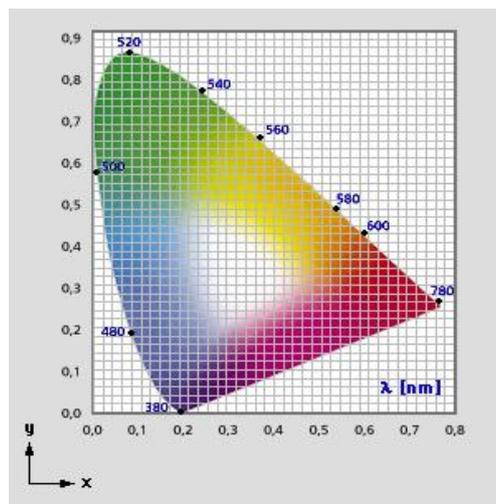


Figure 13 : Diagramme de chromaticité xyY

CIE L*a*b*

Issu du diagramme CIE XYZ, le système L*a*b* peut être considéré comme uniforme. La distance entre deux couleurs est alors directement liée à leur différence d'apparence colorée. Cette distance peut donc directement se déduire du théorème de Pythagore :

$$\Delta E = \sqrt{\Delta L^2 + \Delta a^2 + \Delta b^2}$$

Équation 6: Ecart de couleur

L a et b sont définis comme suit :

$$\begin{aligned}
 L^* &= 116 \left(\frac{Y}{Y_n} \right)^{\frac{1}{3}} - 16 && \text{si } Y/Y_n > 0.008856 \\
 &= 903.3 \left(\frac{Y}{Y_n} \right) - 16 && \text{si } Y/Y_n \leq 0.008856 \\
 a^* &= 500 * (f(X/X_n) - f(Y/Y_n)) \\
 b^* &= 200 * (f(Y/Y_n) - f(Z/Z_n)) \\
 \text{avec :} \\
 f(t) &= \left(t \right)^{\frac{1}{3}} && \text{si } t > 0.008856 \\
 &= 7.787 * t + 16/116 && \text{si } t \leq 0.008856
 \end{aligned}$$

Équation 7 : Transformation XYZ L*a*b*

Ici X, Y et Z sont les coordonnées de la couleur dans le repère CIE XYZ et X_n Y_n et Z_n sont les coordonnées du blanc (généralement D65).

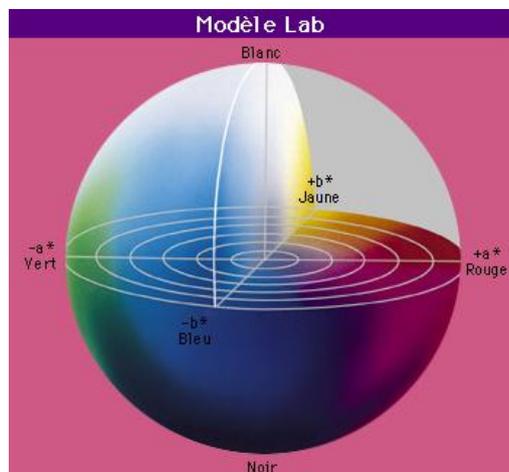


Figure 14 : Model L*a*b*

HSV

Le système de coordonnées HSV (Hue Saturation Value) à l'avantage d'être intuitif, on agit ici sur la teinte, la saturation et la luminance (TSL en français). Evidement cet espace est fortement non uniforme

Traitement informatique de la couleur

Nous avons vu qu'il existait différentes façons de repérer la couleur ; toutefois, nous devons, finalement dans tous les cas, afficher cette couleur, donc revenir à un triplet rouge vert bleu.

Ce changement de repère n'est pas trivial car il dépend du périphérique affichage ou d'impression. L'application informatique doit donc être capable de produire des images en fonction du périphérique qui, lui même, doit être calibré.

Calibration

La calibration d'une chaîne demande un outillage spécifique : logiciels, écran et imprimantes calibrables et des appareils de mesures spectrales. A partir de cet ensemble on définit des profils pour chaque périphérique.

Les profils contiennent :

Des matrices de transformation et de correction colorimétriques

Des courbes de Gamma permettant de corriger la non-linéarité des photophores des écrans.

Le Gamut du périphérique : l'espace de couleur reproductible par le périphérique.

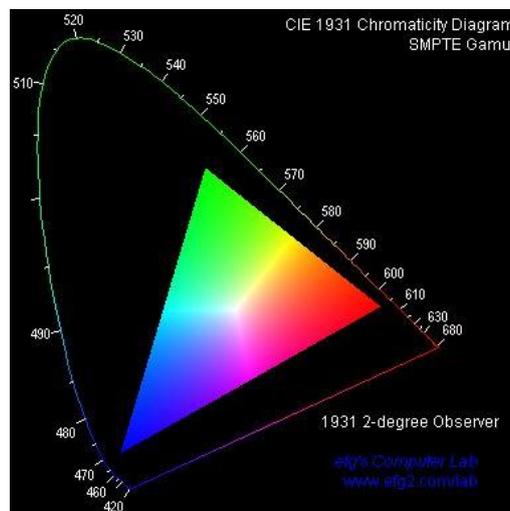


Figure 15 : Gamut d'un écran d'ordinateur

La gestion par profils permet de centraliser la gestion de la couleur. Chaque périphérique ou logiciel producteur de couleur (image par exemple) génère ses triplets RVB pour un périphérique d'affichage normalisé unique. Chaque périphérique d'affichage récupère ces valeurs et les transforme pour son propre espace colorimétrique.

Ces transformations ne sont pas réversibles, principalement à cause du gamut. Lorsqu'une couleur sort du gamut d'un périphérique le profil ramène cette couleur à la couleur la plus proche affichable.

Matière

“La matière se touche, se sent et se voit...se touche des yeux dans un premier temps”. On parle parfois de “couleur sèche” ou de “couleur rugueuse”, cela signifie bien que la matière n’est pas que couleur, il nous faut plus d’adjectifs. Avant même de toucher réellement une surface, tout le monde a une idée précise de la sensation que peut donner cette matière au toucher, de son épaisseur ou bien même de sa température. Cela montre bien que la réponse de la matière à un flux lumineux est bien plus riche en informations. Elle nous indique, par analogie avec nos acquis, de quoi elle est constituée... quitte, parfois, à nous tromper.

Théorie & généralités

BRDF

Une fonction décrit entièrement la réaction de la matière à la lumière, c’est la BRDF, la fonction de distribution de la réflectance bidirectionnelle (voir def). Cette fonction est définie sur Ω^2 , Ω étant l’hémisphère orienté suivant la normale au point considéré.

La BRDF est au cœur de toute simulation d’éclairage (quel que soit l’algorithme utilisé). Elle représente, pour une direction d’illumination donnée, la proportion d’énergie réfléchie dans chacune des directions d’observation.

Dans un algorithme de simulation d’éclairage, la BRDF est généralement représentée par une fonction mathématique telle les modèles de Phong, de Blinn ou de Cook-Torance, mais elle peut aussi être mesurée.

La BRDF ne prend tout son sens qu’une fois appliquée à la forme comme nous le verrons plus loin, mais intéressons-nous avant tout à son origine.

Réflexion & réfraction

Lorsqu’une onde électromagnétique traverse un milieu, sa propagation est déterminée par :

La constante diélectrique relative au milieu

La perméabilité magnétique du milieu

La conductivité du milieu

Sans entrer dans les détails ces caractéristiques permettent de définir l’indice de réfraction n du milieu .

Lorsqu’un champ électromagnétique rencontre une interface entre deux milieux homogènes d’indice de réfraction différent, deux ondes sont produites : une réfléchie et une réfractée. n étant dépendant de la longueur d’onde, ces phénomènes se produisent avec une absorption plus ou moins forte de l’énergie incidente sur l’étendue du spectre.

On peut déduire des équations de Maxwell les lois de Snell-Descartes qui décrivent les relations angulaires entre le rayon incident et les rayons réfléchis ou transmis.

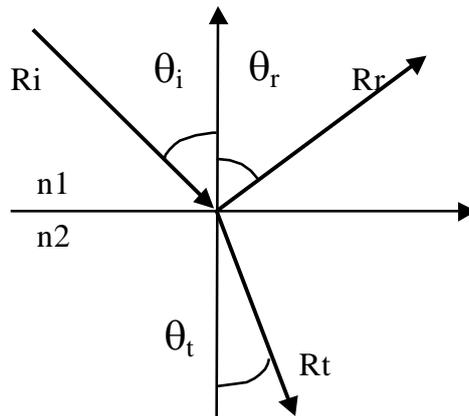


Figure 16 : Géométrie de la réflexion / transmission

$$\theta_i = \theta_r$$

Équation 8 : Loi de la Réflexion

L'angle réfléchi θ_r est égal à l'angle incident θ_i ; par contre le rayon R_t est transmis suivant un angle θ_t dépendant de l'indice de réfraction n .

$$n = \frac{c}{v}$$

Équation 9 : Indice de réfraction

c : célérité de la lumière dans le vide.

v : célérité de la lumière dans le matériau.

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$$

Équation 10 : Loi de Snell-Descartes

n_1 étant l'indice de réfraction du milieu d'origine.

n_2 celui du nouveau milieu.

| | | | |
|---------|------|------------|------|
| Air | 1.36 | Eau | 1.33 |
| Cristal | 3.34 | Glace | 3.31 |
| Diamant | 2.42 | Plexi | 1.51 |
| Verre | 1.5 | Porcelaine | 1.50 |

Exemples d'indices de réfraction

Ceci se produit à l'interface microscopique de deux milieux ou pour des interfaces idéalement lisses (effet miroir). Pourtant, au niveau macroscopique, une surface (interface entre l'air et un matériau) est généralement rugueuse. Dans certains cas, la lumière pénètre profondément dans la matière et des phénomènes de diffusion se produisent. Parfois, encore, le matériau n'est pas homogène ; les réflexions naissent alors d'interactions lumière/matière complexes faisant apparaître, par exemple, des phénomènes interférentiels. Dans ces cas, la réflexion est

atténuée et/ou accompagnée d'un, ou plusieurs, lobes diffus directionnels, généralement, autour de la direction spéculaire pure, mais aussi en rétro-réflexion.

Réflexion sur une surface rugueuse

Lorsqu'un rayon atteint une surface rugueuse, c'est à dire une surface présentant des irrégularités très fines, il est réfléchi et réfracté suivant la normale au point d'intersection. Cette normale a toutes les chances d'être différente de la normale à la surface considérée. Vu de loin, par rapport à la taille des irrégularités, le matériau a une réponse dite diffuse à un flux lumineux.

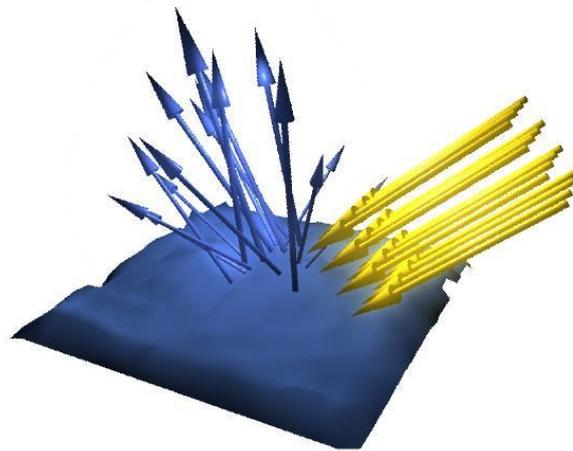


Figure 17 : Réflexion sur un matériau rugueux

C'est ici que la BRDF commence à prendre toute son importance. En effet, elle peut intégrer ce type de phénomènes microscopiques ou macroscopiques, lorsqu'ils sont dus à des imperfections de surfaces ou particules non distinguables à l'œil nu. Dans l'exemple que l'on vient de voir, un lobe de réflectance ressemblerait à ceci :

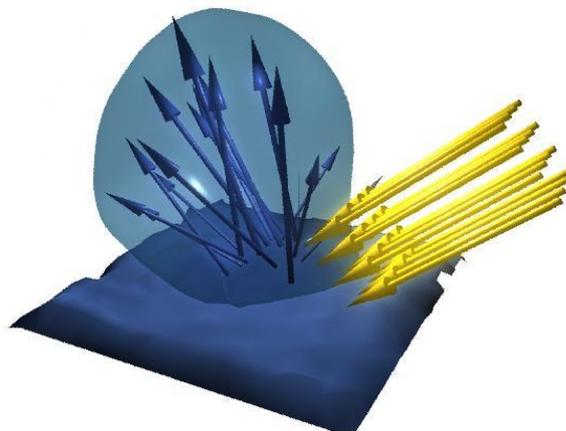


Figure 18 : Réflectance d'un matériau rugueux

Des matériaux tels la magnésite ou la craie ont généralement une surface rugueuse. De plus, leur structure atomique laisse pénétrer la lumière en sous surface et la disperse, la diffusion produite en est alors presque totale. On approxime la réflectance de ce type de matériaux par une réflectance purement diffuse définie par le modèle de Lambert.

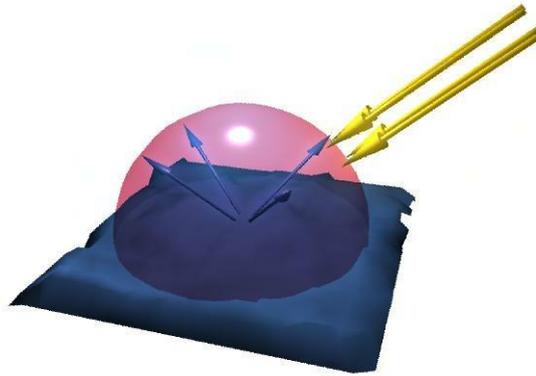


Figure 19 : Model de Lambert

Ici, la BRDF est constante. Ceci signifie que la luminance réfléchie est indépendante de la direction de réflexion :

$$\rho_{bd} = \frac{\rho_d}{\pi}$$

Équation 11 : BRDF lambertienne

ρ_d Est l'albédo: le coefficient de diffusion compris entre 0 et 1

$$\text{donc } L_r(x, \vec{\omega}_r) = \frac{\rho_d}{\pi} I(x)$$

Équation 12 : Radiance diffuse

$I(x)$ est l'irradiance au point x.

Dans un cas plus général (non restreint ou diffus), on s'aperçoit que la BRDF sert alors à abstraire l'aspect de surface. On pourra donc définir des BRDF de minéraux cristallins, de métaux brossés, de tissus ou bien même de revêtements routiers, d'herbe ou d'arbres suivant la distance d'observation (images satellites par exemple).

Un modèle classique de BRDF est celui proposé par Phong en 1975, qui pourrait (bien que n'étant pas réaliste) donner l'aspect de certains plastiques.

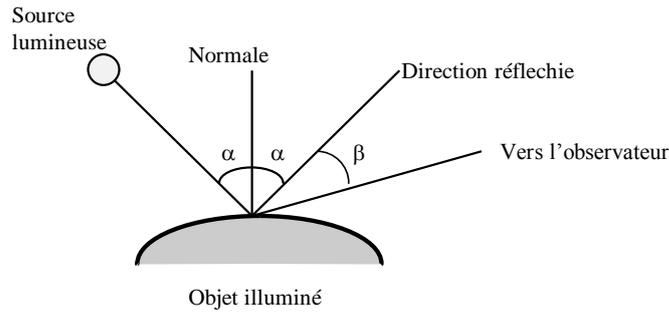


Figure 20 : Géométrie pour le modèle de Phong.

$$I(P) = k_d I_{ambiant} + \sum_{i \leq N} k_d \cdot \cos \alpha_i \cdot I_i + \sum_{i \leq N} k_s(\alpha) \cdot \cos^n \beta_i \cdot I_i$$

Équation 13 : modèle de Phong

$I_{ambiant}$ est une estimation de l'intensité ambiante

N est le nombre de sources,

$I(P)$ est l'intensité totale au point P

k_d est le coefficient de diffusion au point P ,

α_i est l'angle entre la normale et la direction de la source i

I_i est l'intensité de la source i ,

n est l'exposant de Phong

$k_s(\alpha_i)$ est le coefficient de réflexion au point P (dépend de α_i)

β est l'angle entre la direction réfléchie et celle de l'observateur

Réflexions en milieux hétérogènes

Intéressons-nous au cas général d'un rayon lumineux pénétrant dans un milieu hétérogène diélectrique.

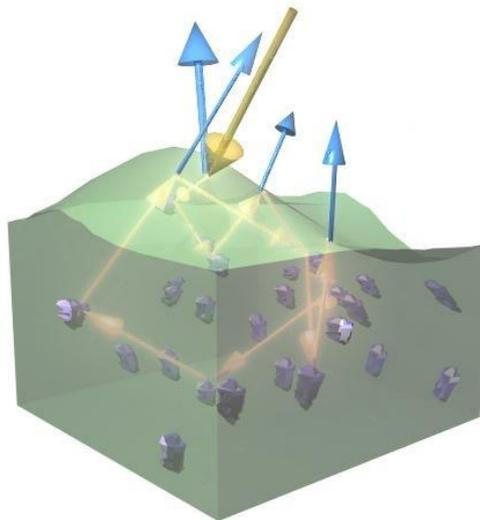


Figure 21 : Réflexion sur un matériau hétérogène

Dans ce cas, il se produit une réflexion spéculaire qui est, en général, non colorée et dont l'intensité augmente avec l'angle d'incidence, et une réflexion diffuse qui est généralement colorée et peut dépendre de l'angle d'incidence.

La réflexion diffuse est due aux multiples réflexions se produisant à l'intérieur même du matériau. Lorsqu'un rayon atteint une particule, il est absorbé en partie et réfléchi suivant les propriétés de la matière qui compose cette particule. Nous avons ici représenté des réflexions spéculaires pures au niveau de la surface et des interfaces diélectrique/particules. En réalité, des phénomènes diffusants se produisent aussi pour ces interfaces. Ils sont dus à la rugosité des interfaces ou à des phénomènes interférentiels (lorsque des particules sont de taille proche de la longueur d'onde). Une modélisation mathématique de ce genre de matériaux en est donc d'autant plus complexe.

Un modèle mathématique basé sur la physique des matériaux a été développé par Cook et Torrance en 1981. Il est relativement simpliste mais se rapproche de la réflexion en milieu hétérogène.

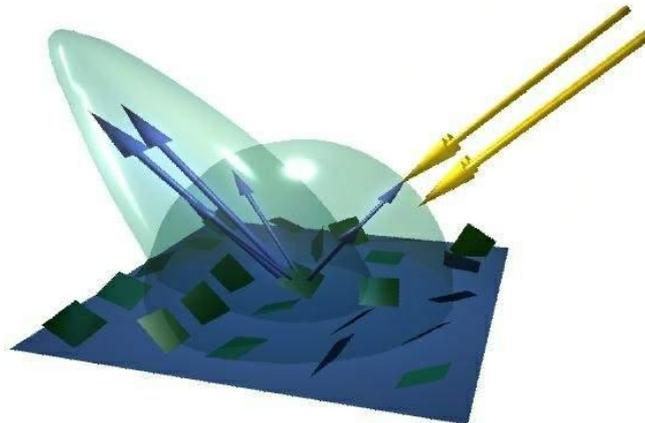


Figure 22 : Model de Cook Torrance

Dans ce modèle, la surface est supposée être composée d'un ensemble de facettes microscopiques planes et isotropes, se comportant chacune comme un réflecteur parfait. La géométrie et la distribution de ces **micro-facettes**, ainsi que la direction incidente de la source lumineuse, déterminent l'intensité et la direction de la réflexion spéculaire.

Pour la composante diffuse de la réflectance, le modèle utilise la loi de Lambert :

$$\rho_d = \frac{d}{\pi} k_d$$

Équation 14 : Terme diffus pour Cook-Torrance.

Avec :

d : la proportion de surface se comportant comme un réflecteur diffus.

k_d : la proportion de lumière réfléchie par le réflecteur diffus.

Pour la composante spéculaire de la réflectance, Cook-Torrance utilise :

$$\rho_s = \frac{F_\lambda}{\pi} \frac{D \cdot G}{(\vec{N} \cdot \vec{V})(\vec{N} \cdot \vec{L})}$$

D est la fonction de distribution de l'orientation des microfacettes.

G est le facteur d'atténuation géométrique, qui représente les effets de masque et d'ombrage entre les microfacettes elles-mêmes.

F_λ est le terme de Fresnel.

N est le vecteur normal de la surface.

V est la direction d'observation.

L est la direction d'illumination.

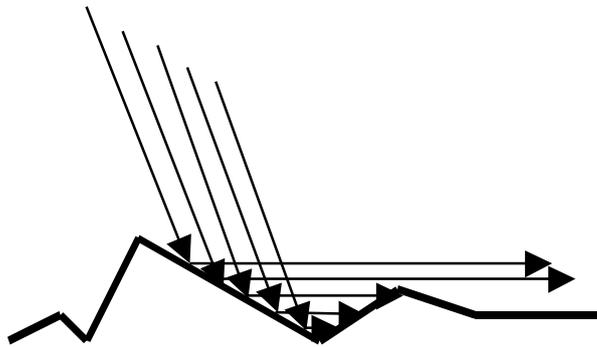


Figure 23 : Illustration du facteur d'atténuation géométrique

Fonction de distribution des microfacettes

Chaque microfacette se comporte comme un réflecteur pur. Ainsi, le modèle ne prend en compte que les microfacettes dont la normale correspond au vecteur moyen H entre les directions d'incidence et de réflexion. Seule une fraction D des microfacettes a cette orientation. Plusieurs distributions peuvent être utilisées : Torrance et Sparrow ont choisi une distribution gaussienne, Blinn une distribution de Trowbridge et Reitz, et Cook-Torrance celle utilisée par Beckmann (équation ci-dessous).

$$D = \frac{1}{4m^2 \cos^4 \beta} e^{-\frac{\tan^2 \beta}{m^2}}$$

β l'angle entre N et H .

m la pente moyenne des microfacettes. Quand m est faible, les pentes des microfacettes varient peu par rapport à la surface.

Modélisation 3D

Nous avons vu dans le chapitre “éléments de mathématique” qu’il est possible de définir des formes 3D par leur équation (Sphère, Tore, Plan...).

Il est possible d’étendre cette approche à d’autres volumes en trouvant des équations du type $f(x,y,z)=0$ mais on ne sait pas forcément trouver une équation pour tout les objets que l’on voudrait représenter.

Pour que l’utilisateur puisse définir les formes qu’il souhaite représenter en 3D, il existe un certain nombre d’autres approches.

Représentation des solides et des fluides

Modélisation surfacique (B-Rep)

Une première approche est de représenter les objets par leur enveloppe. C’est l’approche la plus classique. Pour décrire cette enveloppe nous utilisons généralement des surfaces élémentaires plus ou moins complexes représentés par leurs frontières (**B**oundaries **R**epresentation). Ces éléments de surface sont le plus souvent des polygones (triangles, quads, etc.) ou Carreaux paramétrés (Besier, B-Splines, etc.).

Polygones

Les polygones sont des surfaces planes appelées facettes définis par des sommets et les connections entre ces sommets (les arêtes). Ils permettent de définir tous types d’objets en les agencant de façon contiguë. Généralement on utilise des triangles ou des quadrilatères.

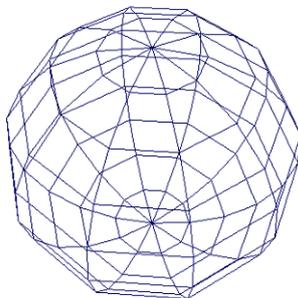


Figure 24 Modélisation polygonale: Sphère

Dans ce cas la modélisation d'un objet consiste en la création d'un ensemble de polygones et au positionnement des sommets dans l'espace. Il est alors possible d'appliquer une transformation géométrique globale afin de d'agir sur l'ensemble de l'objet ou des transformations géométriques locales afin de modifier la position des points individuellement.

Le principal point négatif de la modélisation par polygones réside dans le fait que pour une définition précise de surfaces courbes il faut nécessairement employer un grand nombre de polygones. Une solution à ce problème est la décimation du maillage en niveaux de détail (Level Of Detail ou LOD). Lors de l'affichage on choisit alors automatiquement le LOD en fonction de la distance de l'objet à la caméra.

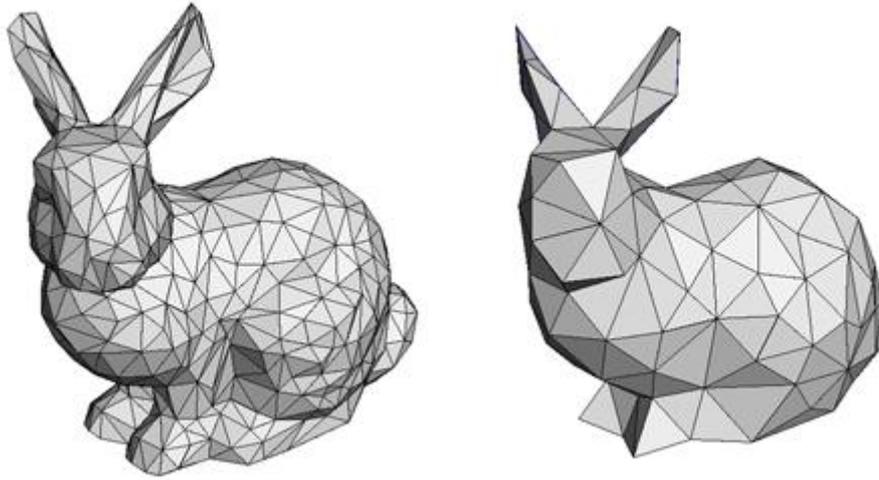


Figure 25 Modélisation polygonale: niveaux de détails

Courbes et Carreaux paramétrés

Une autre façon de représenter des objets par surface est d'utiliser des carreaux paramétrés. Ceux-ci sont basés sur des courbes polynomiales. Elles ont été introduits en informatique graphique par P.Bezier puis généralisé par la suite en b-splines puis en NURBS (B-splines rationnelles non uniformes). L'intérêt principal de cette forme de représentation est de permettre la création et la modification de surfaces courbes en manipulant de façon intuitive les sommets (nommés point ou poignés de contrôle) d'un polygone.

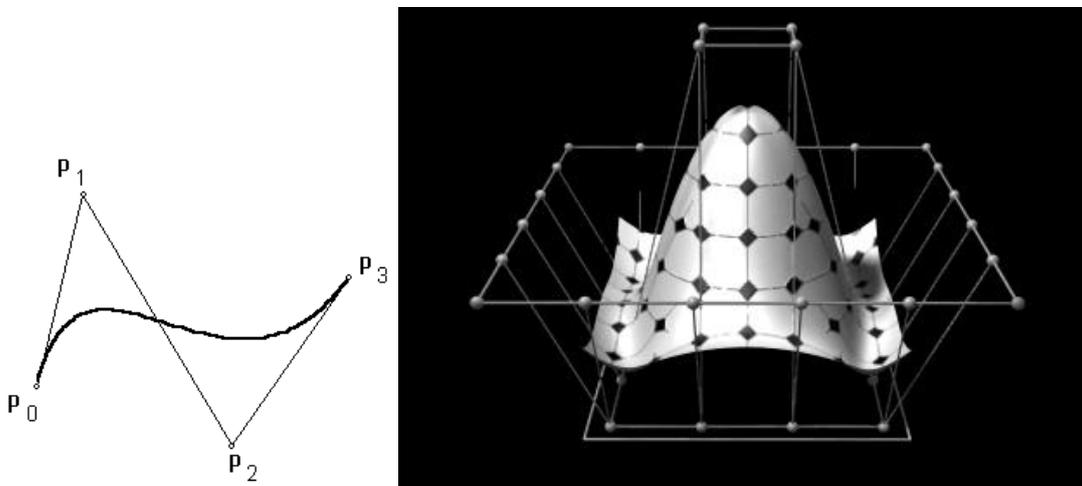


Figure 26 Courbe de Bezier et NURBS

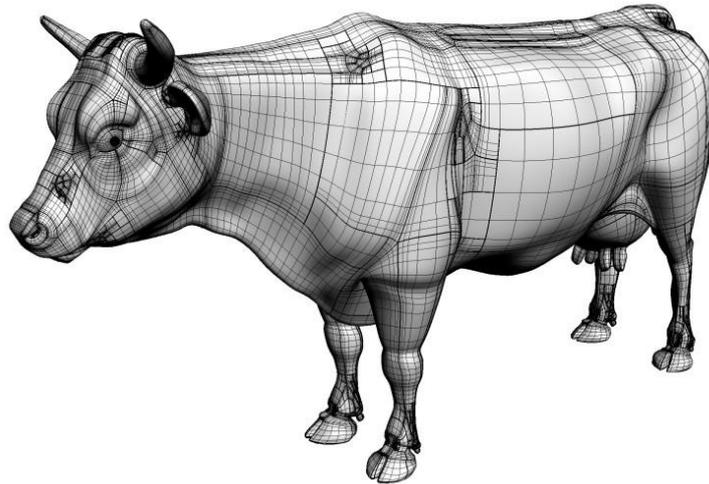


Figure 27 Objet modélisé avec des NURBS

Surfaces de Subdivision

Une autre approche, paramétrique elle aussi, est d'utiliser les surfaces de subdivision. Les poignées de contrôle agissent alors sur l'enveloppe complète jusqu'à un certain niveau de subdivision.

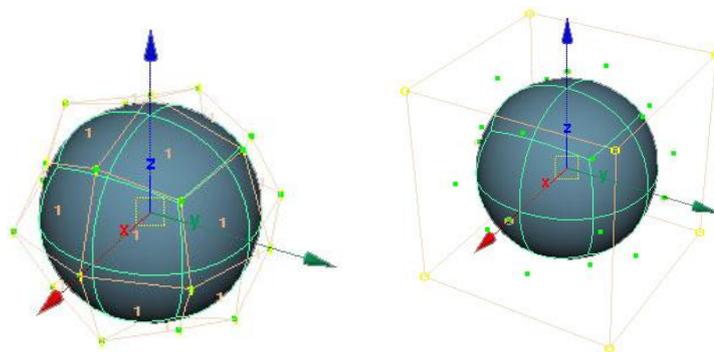


Figure 28 Sphère par surface de subdivision

La représentation par surface de subdivision permet une modélisation intuitive en mettant à disposition les sommets des polygones et/ou les points de contrôle des courbes et volumes.

CSG

Constructive Solid Geometry.

Ici l'idée est de réaliser un arbre d'opérations booléennes dont les feuilles sont des volumes 3D élémentaires tel que sphère, tore, cube, etc.

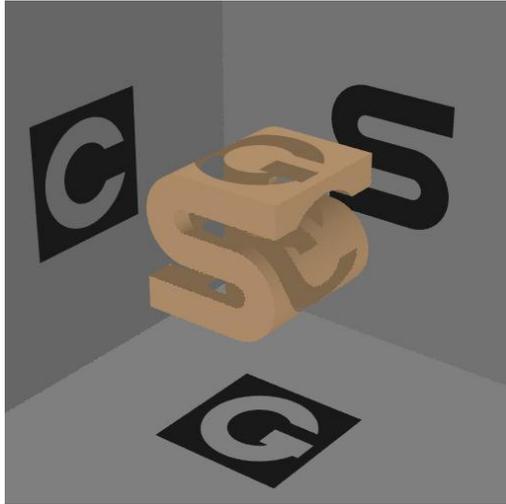


Figure 29 Exemple de CSG

Cette approche, plus légère que la représentation par frontière, permet de définir des formes précises sans que les imprécisions de calcul influent sur la visualisation. Mais elles restent limitées par le nombre de volumes élémentaires disponibles.

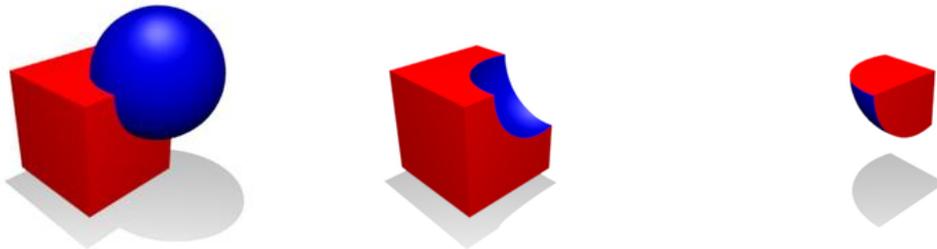


Figure 30 CSG - Union | Différence | Intersection

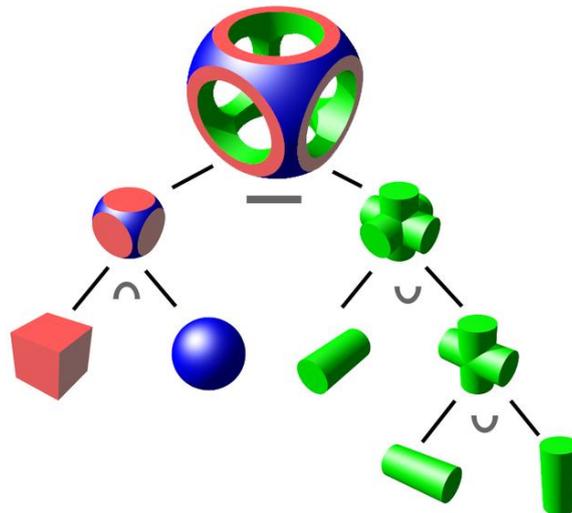


Figure 31 Exemple d'arbre CSG

Modélisation Volumique

Il est possible de se représenter les objets, non pas seulement comme des enveloppes, mais comme des constructions pleines. On définit alors comme élément (brique) de base des cubes de très petite taille (appelés aussi voxels). Ces éléments sont regroupés, empilés, pour former un objet. La modélisation se fait alors par élimination de matière.

La modélisation volumique peut être essentielle lorsque l'objet est composé de matière translucide non homogène. C'est aussi l'approche adoptée lors de la modélisation de fluides (liquides, fumés, nuages...) car, outre l'aspect interaction lumière/matière, elle donne la possibilité de développer des modèles physiques sur les particules (masse ressort).



Figure 32 Deux niveaux de résolution en modélisation volumétrique



Figure 33 Exemple de rendu volumique

Modélisation par fractales

La modélisation de formes complexes comme les plantes ou les terrains nécessitent un travail considérable si l'on utilise les méthodes classiques. Par exemple si l'on considère un arbre de 20 000 feuilles elle mêmes constitués de 20 triangles, il est difficilement imaginable qu'un designer puisse placer convenablement 400 000 triangles.

Une des solutions à ce problème est d'utiliser les propriétés récursives de ce type de formes en utilisant des fractales ou des algorithmes génétiques.

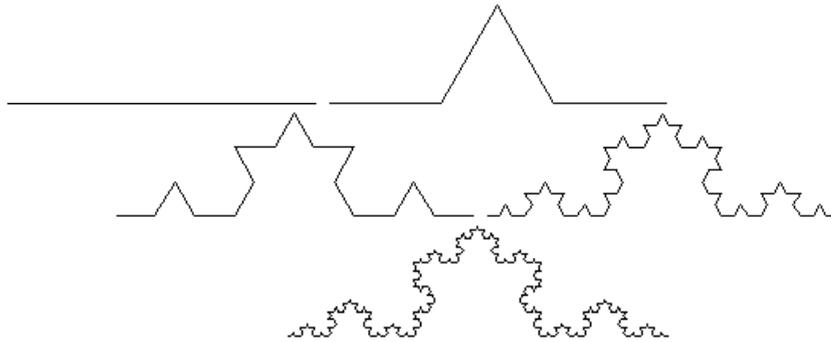


Figure 34 exemple de fractale

Organisation de la scène

Graphe de scène

Une scène est composée d'un ensemble d'objets. On peut l'organiser dans un arbre en définissant des relations entre les objets. Par exemple positionnant un objet relativement à un autre. De cette façon toute transformation appliquée à un objet sera appliquée à ces fils. Cet arbre est appelé graphe de scène, chaque feuille étant un objet de la scène et chaque nœud une transformation.

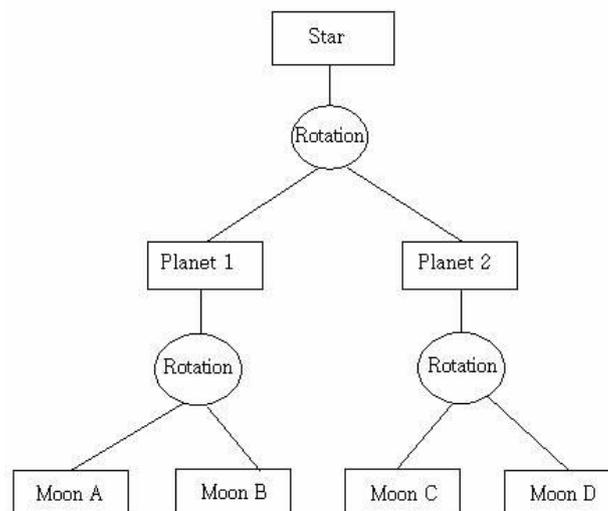


Figure 35 Exemple de Graphe de Scène

Partitionnement spatial

Dans certains cas il peut être avantageux d'organiser la scène suivant un ordonnancement spatial. Cette organisation permettant facilement d'identifier les objets (ou surfaces) se trouvant dans une zone donnée de l'espace.

Octrees

Le partitionnement spatial par Octree englobe la scène dans un cube subdivisé récursivement en 8 cubes fils. Chaque cube peut alors être défini comme vide, partiellement plein ou plein.

Dans le cas d'une modélisation volumique les octrees permettent de ne pas avoir une subdivision régulière de l'espace en ce concentrant sur les frontières, le gain d'espace mémoire est alors important.

D'autre part, les octree permettent de trouver facilement les relations de voisinage entre les objets.

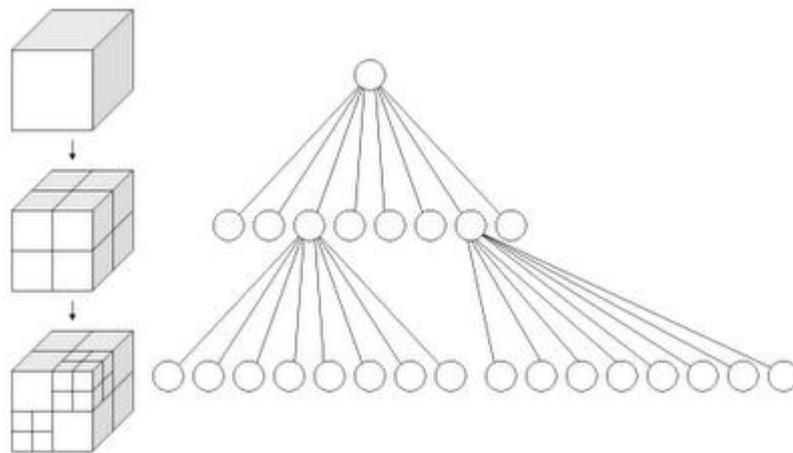


Figure 36 Partitionnement spatial en Octree

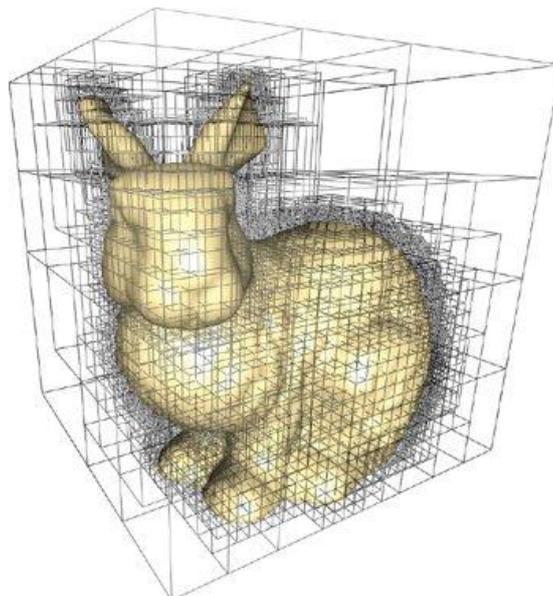


Figure 37 Exemple d'utilisation des Octree

BSP

Binary Space Partition

Ici, un arbre binaire est utilisé pour partitionner l'espace. La racine de l'arbre est l'espace tout entier. Cet espace est subdivisé récursivement en paires de sous espaces délimités par un plan. Cette subdivision récursive peut permettre de définir des polygones concaves (définitions des frontières) mais aussi et surtout de positionner les objets les uns par rapport aux autres facilitant ainsi les calculs de visibilité.

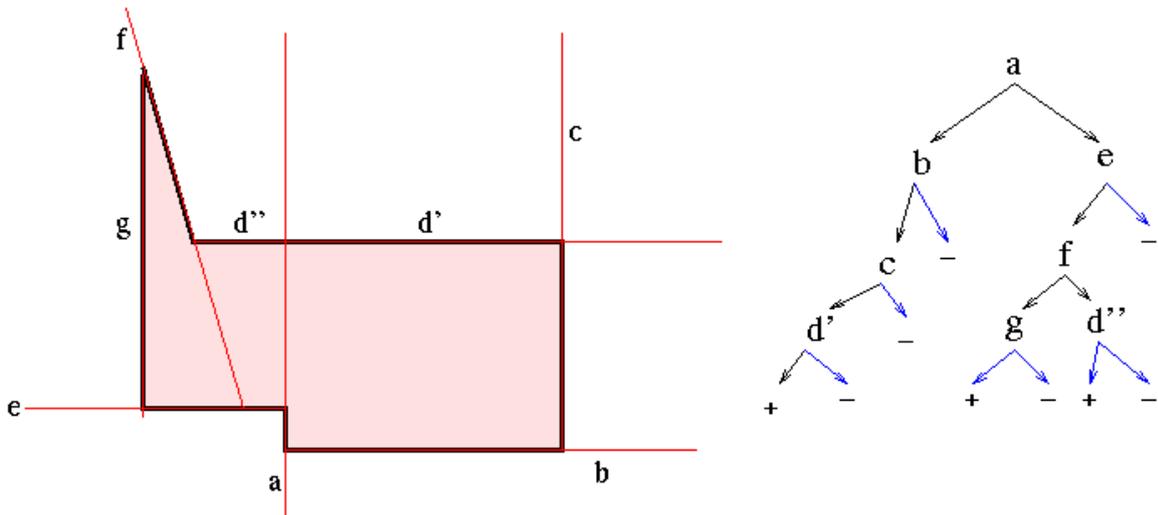


Figure 38 Exemple de BSP

Prise de vue

Comme nous l'avons vu l'œil humain fonctionne comme un appareil photo (ou plutôt l'inverse). Le cristallin joue un rôle optique, il concentre la lumière de façon à produire une image virtuelle sur la rétine. Il a la capacité de se déformer pour ajuster la distance focale. L'iris ajuste la quantité de lumière qui pénètre dans l'œil.

Le but de cette section est d'étudier comment produire une image de la scène soit depuis un point de vue donné (comme le ferait l'œil ou un appareil photo) ou suivant d'autres modes de projection.

Projection sur le plan image

Nous supposons donné une scène virtuelle et un plan image positionné dans l'espace 3D.

Modèle du sténopé

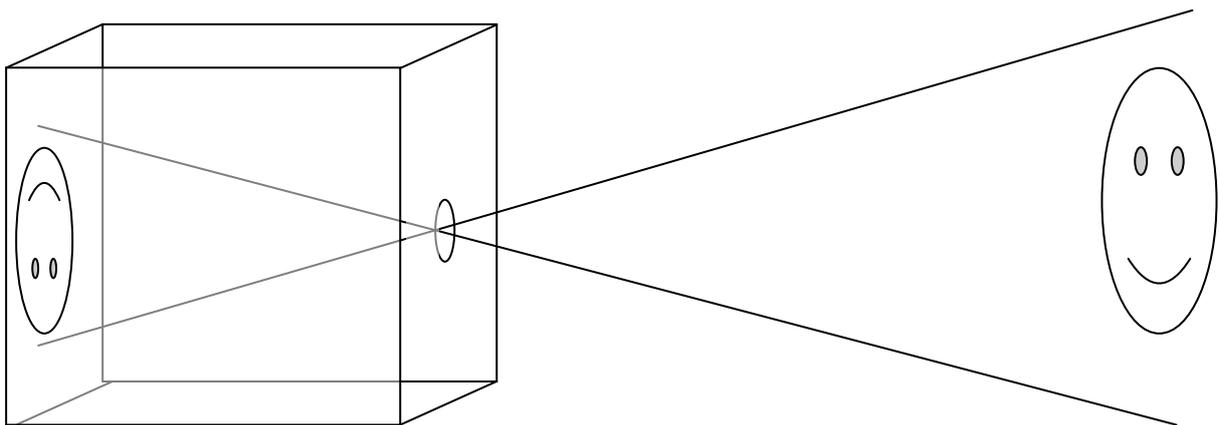


Figure 39 modèle sténopé

Un sténopé est constitué d'une boîte noire percé sur une des faces d'un trou (de diamètre 1mm). La face opposée est constituée d'une surface plane translucide, sur ce support se forme une image virtuelle.

Ce modèle, à la base de la photographie est repris par les algorithmes de rendu et d'affichage 3D.

La transformation correspondant au model sténopé est la projection perspective.

Projections perspectives

Une projection perspective fait converger toutes droites parallèles de l'espace vers un point de fuite. Les droites parallèles au plan de projection n'ont donc pas de point de fuite.

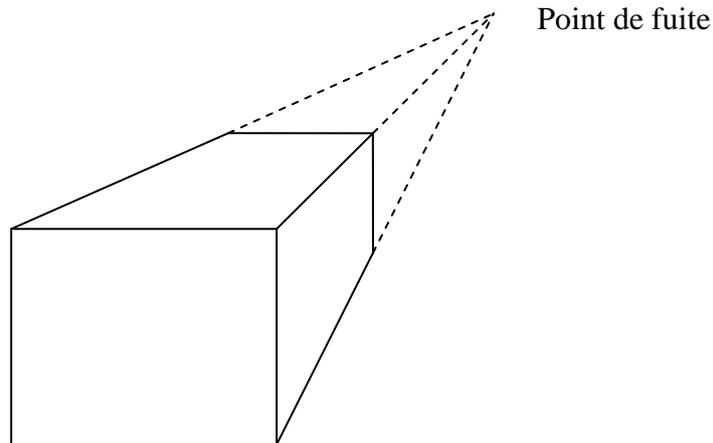


Figure 40 Projection perspective d'un cube

Projection parallèle

On peut définir deux types de projections parallèles.

La plus utilisée en modélisation est la projection orthogonale. Elle sert principalement à définir trois vues (face, coté, dessus) de la scène en cour de modélisation en projetant celle-ci sur des plans orthogonaux aux axes du repère.

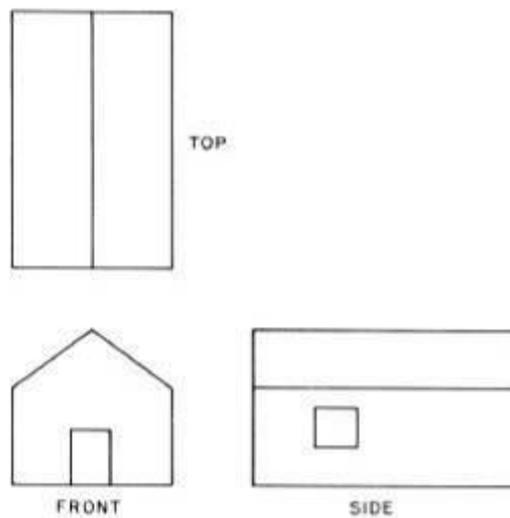


Figure 41 3 vues en projection parallèle

La projection parallèle oblique permet de projeter la scène sur un plan en suivant une direction de projection qui n'est pas la normale au plan.

Visualisation en mode filaire

Une fois la projection réalisée sur le plan image il est nécessaire de la discrétiser puisque l'on dispose pour l'affichage d'écrans bitmap, c'est à dire une matrice de pixel.

Supposons donc que nous disposions des coordonnées 2D des sommets de triangles (résultant de la projection de la scène). Un mode de visualisation possible est tout simplement de tracer les contours des triangles (donc des segments).

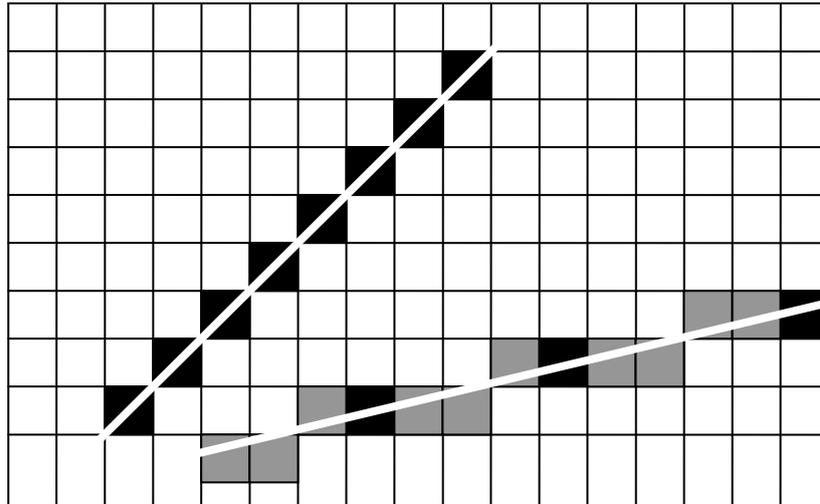


Figure 42 tracé de segments

Lors du tracé, les points du segment passant par le centre d'un pixel (en noir sur le schéma) ne pose évidemment pas de problèmes. Par contre il faut pouvoir trouver une approximation pour les autres points (en grisé).

Pour à tracer un segment continu d'épaisseur 1 pixel nous devons attribuer un, et un seul, pixel par colonnes si la pente du segment est comprise entre -1 et 1. Sinon, le cas est symétrique, et nous attribuerons donc un pixel par ligne.

Plaçons nous dans le cas où p , la pente du segment est comprise entre -1 et 1. Alors on peut déterminer l'équation de la droite portant le segment d'extrémités $A=(x_a, y_a)$ et $B=(x_b, y_b)$ tel que $y=px+c$

$$p = (y_b - y_a) / (x_b - x_a) = \Delta y / \Delta x$$

et $c = y_a - p x_a$

On incrémente x de x_a à x_b , pour chaque x on calcul y . On en déduit le pixel à marquer : x , entier le plus proche de y .

Cette méthode n'est pas très efficace car on effectue un grand nombre de calculs flottants. Dans ce cas un algorithme incrémental est bien plus adapté. Il suffit de calculer la pente p , alors pour tout incrément de 1 en x , y est incrémenté de p .

Bresenham (1965) propose une amélioration de l'algorithme incrémental de façon à n'utiliser que des entiers. Plaçons nous dans le premier octant (p compris entre 0 et 1) sachant qu'il est

trivial d'étendre aux autres octants. L'idée est de mesurer la distance $d1$ et $d2$ entre le segment théorique est les pixels $(x+1, y)$ et $(x+1, y+1)$:

$$d1 = [p(x+1) + c] - y$$

$$d2 = [y + 1] - [p(x+1) + c]$$

Si $d1-d2 < 0$ alors le point suivant à afficher est $(x+1, y)$, sinon point suivant à afficher est $(x+1, y+1)$.

$$d1-d2 = 2(\Delta y/\Delta x)(x+1) - 2y - 1 + 2c$$

Pour n'utiliser que des entiers on peut définir le paramètre de décision d :

$$d = \Delta x(d1-d2) = 2\Delta y(x+1) - 2y\Delta x - \Delta x + 2c\Delta x$$

(Δx étant positif d à la même signe que $d1-d2$.)

On peut alors aussi déterminer d de façon incrémental tel que :

Si $d < 0$ alors le pixel suivant est $(x+1, y)$ donc $d\#$ (le prochain paramètre de décision) est :

$$2\Delta y(x+2) - 2y\Delta x - \Delta x + 2c\Delta x = d + 2\Delta y$$

De même si $d \geq 0$, $d\# = 2\Delta y(x+2) - 2(y+1)\Delta x - \Delta x + 2c\Delta x = d + 2(\Delta y - \Delta x)$

Elimination des parties cachées

Pour améliorer la lisibilité de l'image produite il est nécessaire de pouvoir éliminer les parties cachées de la scène.

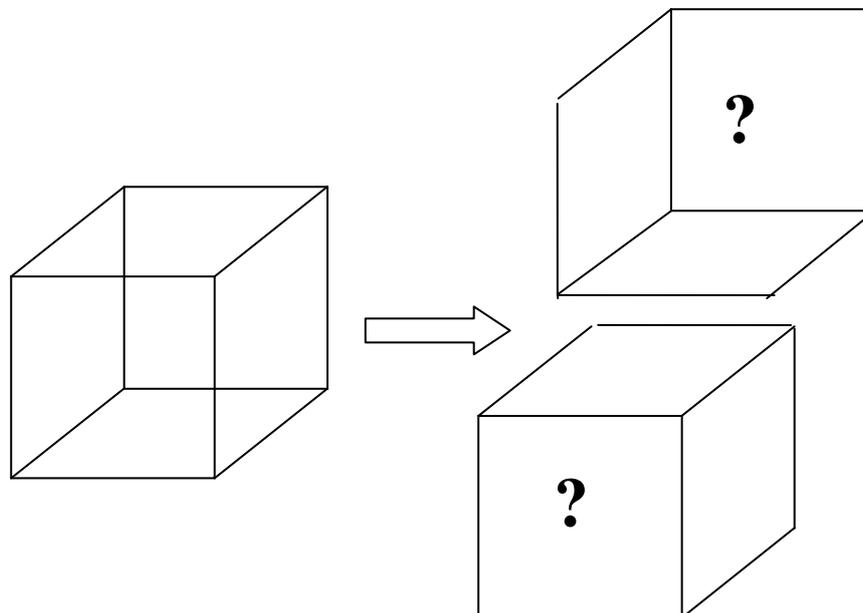


Figure 43 Interprétation d'image filaire ambigu

Algorithme du peintre

Trier les polygones en fonction de leur plus grande coordonnée en Z

(z est la distance à la caméra suivant la direction de visée)

Si deux polygones ont des étendues en Z qui se recouvrent :

On teste :

Si les boites englobantes de leur projection sont séparés
 Si l'un est complètement derrière l'autre
 Si leur projection sont séparés
 Si rien ne marche, on coupe l'un des polygones par le plan de l'autre
 Puis on affiche les polygones dans l'ordre, les un sur les autres.

- + Intuitif
- + Coût mémoire : affichage $O(n)$, tri $O(n \log n)$
- Affiche toute la scène

Z buffer

Initialiser un tableau de Z (de la taille de l'image) à ZMAX
 Pour chaque polygone :
 Projeter le polygone sur le plan Image
 Pour chaque pixel dans la projection du polygone
 Calculer la valeur de Z_p
 Si Z_p est inférieure à la valeur correspondante dans le buffer
 modifier la valeur du buffer avec Z_p
 mettre à jour la couleur à l'écran

- + facile à implémenter
 - + rapide
 - coût mémoire
 - Aliasing/artefacts

Scan Line

On suppose que les polygones ne s'entrecoupent pas, si ce n'est pas le cas on subdivise.

Tri des arrêtes des polygones projetés par y min.

Puis pour chaque ligne :

- On ordonne suivant x les intersections entre la scanline et les arrêtes des polygones projetés.
- On suit la scanline :
 - Si on rencontre une arête, le polygone est *in*
 - Si on rencontre l'arête de sortie du polygone, il cesse d'être *in*
- Tant qu'il n'y qu'un seul polygone *in* : pas de problèmes
 - Si deux polygones sont *in* simultanément :
 - Quand on passe l'arête de début du deuxième polygone, on cherche lequel est devant

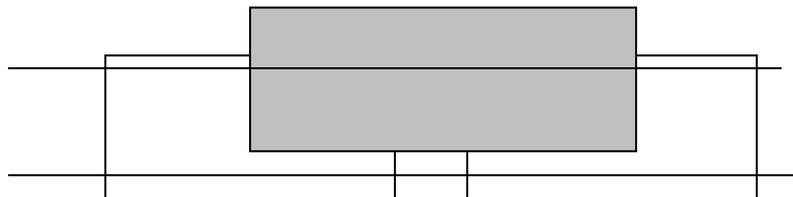


Figure 44 scanline

Optimisation : élimination des faces non visibles

Back face Culling

Résolution dans l'espace Objet.

Pour éviter les calculs inutiles on va chercher à éliminer les polygones qui ne sont pas tournés vers la caméra :

Si le point de vue n'est pas devant le polygone on n'affiche pas le polygone

Produit Scalaire :

(Sommet-Point de Vue) * Normale

>0 on garde

<0 on élimine

+gain 50% du temps de calcul en moyenne

+Faible coût

Cone de vision

Une technique d'optimisation courante consiste à éliminer les polygones qui ont tous leurs sommets en dehors du cône de vision.

Shading « lissage »

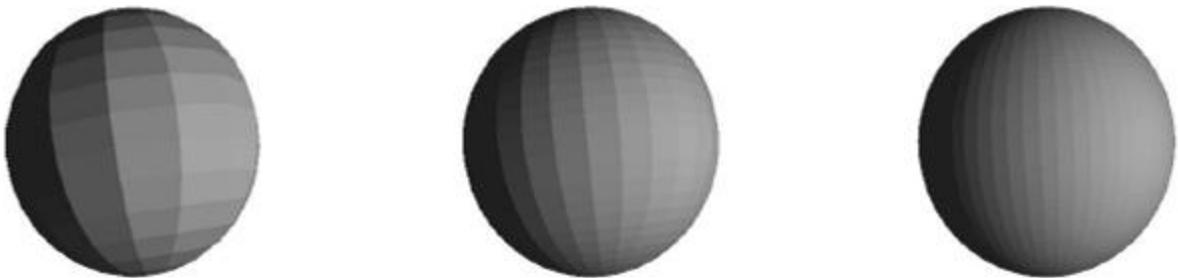


Figure 45 Illustration du lissage plat

Lorsque l'on affiche un polygone, avec l'algorithme du Z buffer par exemple, avec un ombrage plat on obtient ce genre de résultat. Il faut augmenter la tessellation pour voir disparaître les facettes

lissage de Gouraud

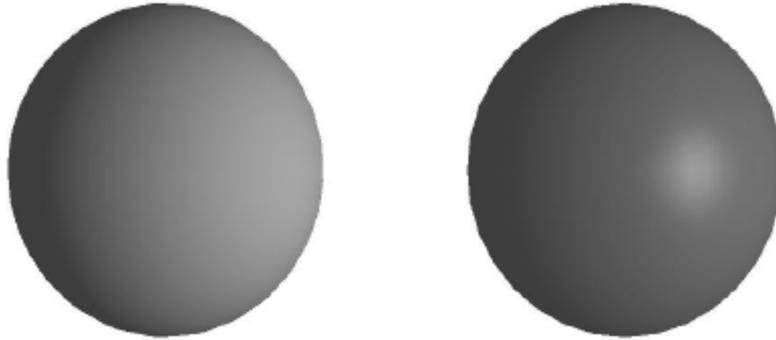
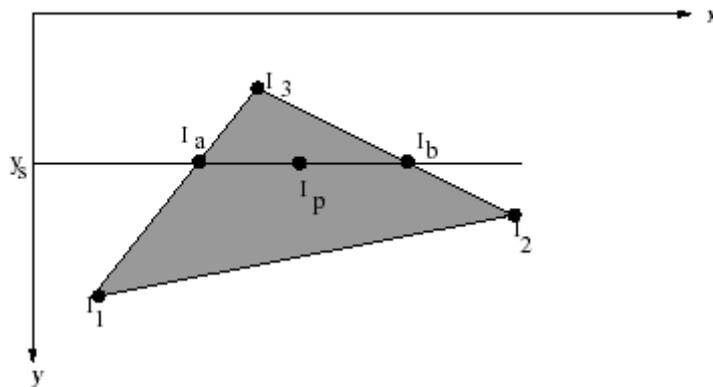


Figure 46 lissage de Gouraud

La méthode de Gouraud utilise l'intensité au sommet des polygones (il faut donc connaître la direction des normales), puis effectue une interpolation linéaire suivant les arêtes des polygones. Et enfin une 2ème interpolation linéaire pour définir l'intensité à l'intérieur du polygone.



$$I_a = I_3 - (I_3 - I_1)(y_3 - y_s)/(y_3 - y_1),$$

$$I_b = I_3 - (I_3 - I_2)(y_3 - y_s)/(y_3 - y_2),$$

$$I_p = I_b - (I_b - I_a)(x_b - x_p)/(x_b - x_a).$$

Figure 47 calcul de l'interpolation linéaire pour le lissage de Gouraud

lissage de Phong

Le lissage de Phong [1975] consiste à déterminer la normale en un point d'une facette polygonale par interpolation des normales aux sommets de cette facette.

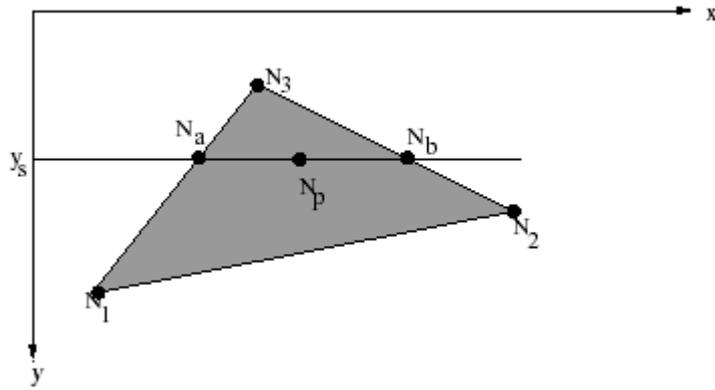


Figure 48 Interpolation de normale : lissage de Phong

L'intérêt de cette approche par rapport au lissage de Gouraud réside principalement dans sa capacité à traiter les réflexions spéculaires. Gouraud ne permet pas, en effet, de prendre en compte les réflexions spéculaires lorsque celles-ci sont localisées au centre d'une facette.

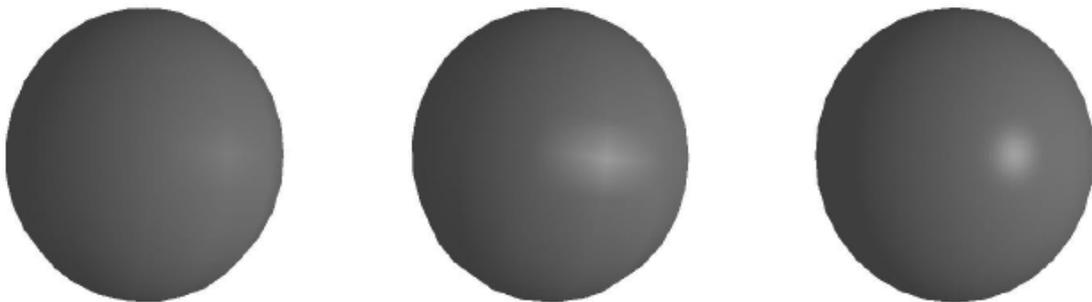
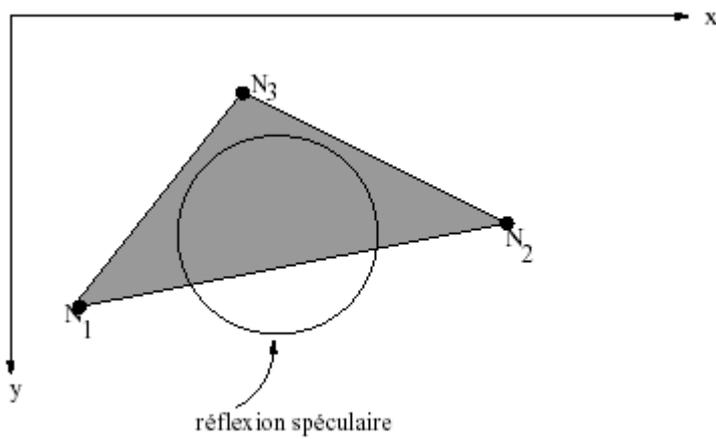


Figure 49 (a),(b) modèle d'illumination de Phong et ombrage de Gouraud : deux vues différentes ; (c) modèle d'illumination de Phong et ombrage de Phong.

Simulation d'éclairage

Equation du rendu

Pour mettre en œuvre une simulation nous devons comprendre et formaliser le transport de la lumière dans une scène (un environnement). Pour cela, on se base sur l'équation fondamentale de réflectance.

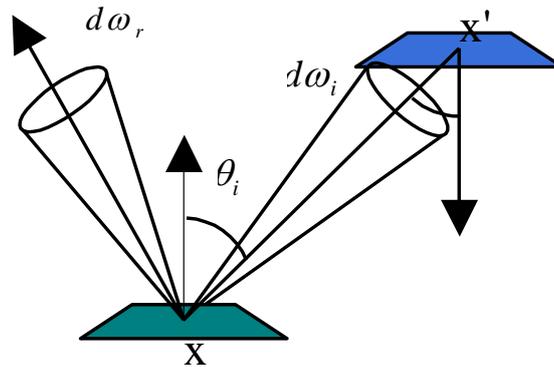


Figure 50 : géométrie de la réflexion / transmission

L'équation de réflectance donne la distribution de la lumière réfléchiée en un point, en fonction de la BRDF en ce point et de la distribution de la lumière incidente.

$$L_r(x, \vec{\omega}_r) = \int_{\Omega_i} \rho_{bd}(x, \vec{\omega}_i, \vec{\omega}_r) L_i(x, \vec{\omega}_i) \cos \theta_i d\omega_i$$

Équation 15 : équation de réflectance

Le calcul de la distribution de la lumière incidente correspond à la recherche d'un modèle d'éclairage. J.T. Kajiya a proposé en 1986 une formulation générale de ce modèle :

$$L_r(x, \vec{\omega}_r) = L_e(x, \vec{\omega}_r) + \int_S \rho_{bd}(x, \vec{\omega}_i, \vec{\omega}_r) L_r(x', \vec{\omega}_r') G(x, x') dx dx'$$

Équation 16 : équation générale du rendu

$L_e(x, \vec{\omega}_r)$ est la luminance propre émise au point x dans la direction $\vec{\omega}_r$.

$G(x, x')$ est appelé facteur de forme différentiel. C'est un terme purement géométrique qui représente l'atténuation du flux en fonction de l'orientation mutuelle des normales aux points x et x' .

si x visible depuis x'

$$G(x, x') = \frac{\cos \theta_i \cos \theta_r'}{d^2} \quad \text{avec } d \text{ la distance séparant les points } x \text{ et } x'$$

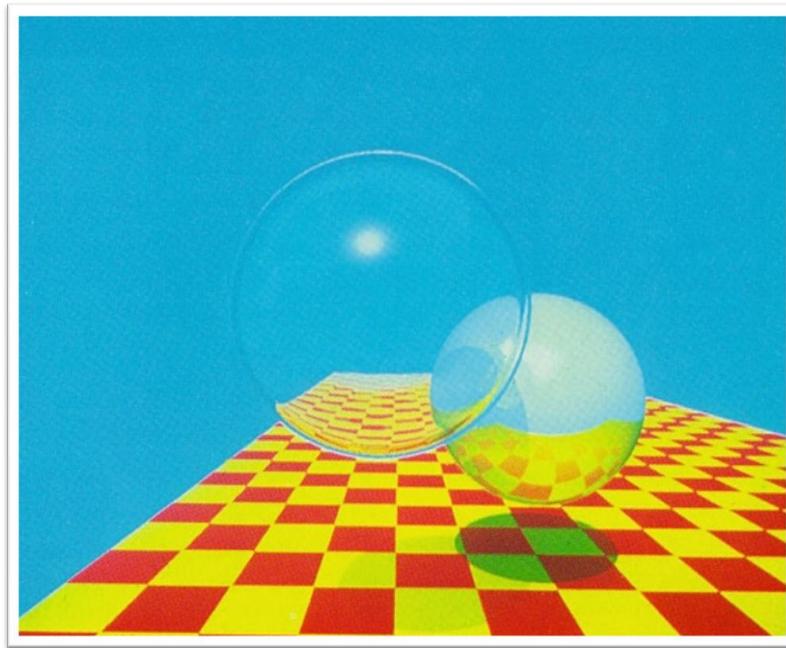
sinon

$$G(x, x') = 0$$

Bien que l'équation générale de rendu ne prenne pas en compte la diffraction et la polarité de la lumière, on peut en déduire la plupart des modèles d'illumination courants. Ces modèles passent généralement par la discrétisation et/ou simplification de l'équation car l'intégrale est complexe à résoudre dans un temps fini.

Algorithmes de simulation d'éclairage

Lancer de rayons



Plus qu'un modèle, cet algorithme, né en 1968, n'est réellement exploité pour synthétiser l'éclairage d'une scène qu'à partir de 1980. Dans son article, Whitted présente plusieurs images avec des effets optiques alors inédits. Actuellement le rendu par lancer de rayons est utilisé dans la plupart des logiciels de rendu pour produire des images réalistes de qualité. Bien que n'étant pas adapté à une utilisation interactive, la puissance sans cesse croissante des ordinateurs permet d'obtenir des résultats dans des temps raisonnables. Toutefois, nous allons voir qu'il souffre de certaines lacunes rédhibitoires pour atteindre un photo-réalisme parfait.

```

pour chaque pixel de l'écran faire
{
    définir le rayon primaire œil pixel ;
    pour chaque objet faire
    {
        tester les intersections ;
        prendre la plus proche ;
    }
    relancer des rayons vers les sources lumineuses ;
    calculer l'éclairement du point d'intersection
    lancer un rayon dans la direction de réflexion ;
    lancer un rayon dans la direction de réfraction ;
    affecter la couleur du pixel ;
}

```

Figure 51 : Algorithme du lancer de rayons

Le principe consiste à lancer des rayons qui partent de l'œil et passent au travers d'une "grille de pixels" formant l'image virtuelle. La couleur d'un pixel est calculée à partir du premier objet que rencontre le rayon dit primaire. De cette intersection sont lancés des rayons secondaires vers les sources lumineuses et éventuellement dans les directions de réflexion et de réfraction. Ainsi de suite jusqu'à obtenir la couleur du pixel par combinaison des énergies reçues.

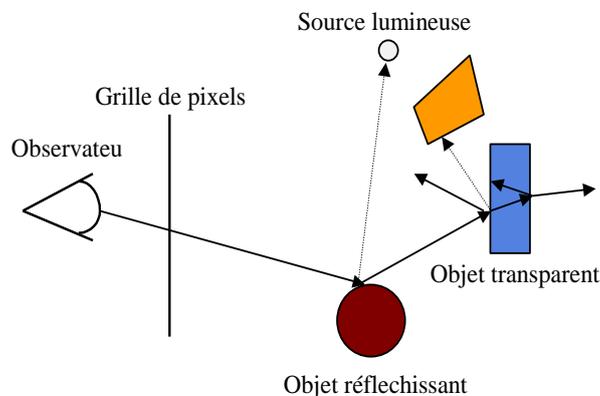


Figure 52 : Le lancer de rayons

On remarque que les rayons suivent le trajet inverse de la lumière. Pourtant de ce point de vue le modèle reste valide car il respecte le principe de réciprocité de Helmholtz et les lois de Snell-Descartes. Par contre, l'échantillonnage trop faible des directions ne permet pas de prendre en compte les inter-réflexions diffuses. Ainsi, un objet mat, non directement éclairé par une source lumineuse, ne sera visible que grâce au terme d'intensité ambiante. Les images générées par des algorithmes de lancer de rayons souffrent d'un aspect synthétique...

Méthodes de Monte-Carlo

Les méthodes de Monte-Carlo sont des méthodes probabilistes qui reposent sur des tirages aléatoires. Elles peuvent être utilisées pour résoudre des problèmes déterministes tels que l'intégration d'une fonction. Dans ce cas, la méthode consiste à effectuer un tirage aléatoire sur l'intervalle d'intégration qui va permettre de définir un estimateur de l'aire sous la courbe. Sur un grand nombre de tirages, la moyenne des estimateurs primaire permet de définir un estimateur secondaire ... ainsi de suite jusqu'à obtenir une valeur approchée de l'intégrale.

Tracé de chemins - Path tracing

L'intégration de Monte-Carlo peut s'appliquer à l'équation générale de rendu comme l'a montré Kajiya en 1986 par la méthode du tracé de chemins (Path Tracing).

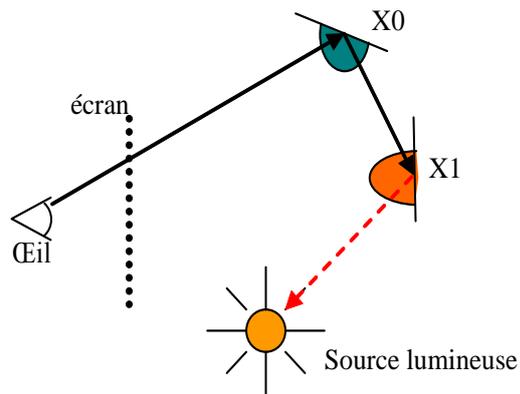


Figure 53 : Tracé de chemins

La méthode du tracé de chemins consiste à construire une marche aléatoire X_0, X_1, \dots, X_n en partant de l'œil et en passant par un pixel donné. Le rayon arrivant en un X_i est renvoyé dans une direction aléatoire donnée par une fonction de densité de probabilité spécifique au matériau, la BRDF. Lorsqu'une source lumineuse étendue est atteinte, cela contribue à une estimation de la valeur du pixel. C'est donc après un grand nombre de chemins tracés que l'on obtient une bonne estimation du pixel. Cette méthode donne de très bons résultats mais converge dans des temps souvent très importants. Pour une scène simple il faut classiquement de l'ordre de 5000 échantillons par pixels pour obtenir un résultat non bruité.

Tracé de chemins bidirectionnel - Bidirectional path tracing

La résolution de l'intégrale de l'équation du rendu par Monte Carlo pourrait également se faire en traçant des chemins depuis les sources lumineuses. Mais dans ce cas le temps de convergence est excessivement long du fait qu'il est très peu probable que le chemin aboutisse à l'œil. Dans la méthode bidirectionnelle, deux chemins sont tracés simultanément, l'un depuis une source (shooting ray), l'autre depuis l'œil (Gathering ray). Chaque sommet du chemin issu de la source est alors considéré comme "une source secondaire" éclairant la fin du chemin issu de l'œil.

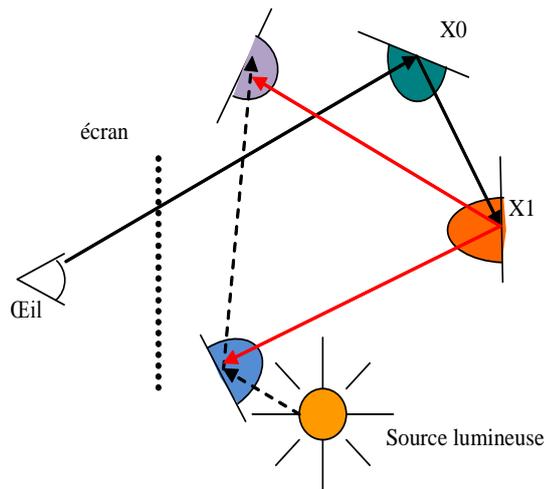


Figure 54 : Tracé de chemins bidirectionnel

Photon Mapping



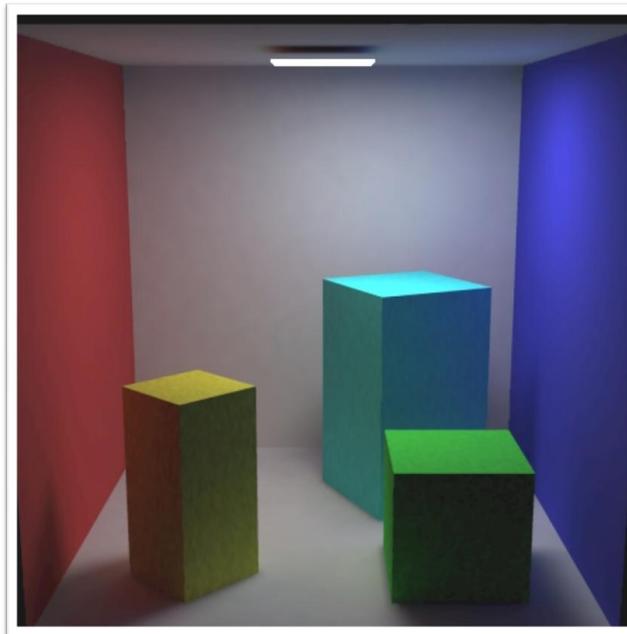
C'est une méthode qui s'effectue également en deux passes :

L'énergie est distribuée dans la scène depuis les sources lumineuses. Lors de chaque réflexion diffuse ou spéculaire, on stocke dans une base de donnée (indépendante de la géométrie) les informations sur la position, la direction d'incidence et l'énergie transportée.

Le calcul de l'image à partir de la caméra se fait grâce à un lancer de rayon classique (sans qu'il soit nécessaire de lancer des rayons vers les sources lumineuses). Seules sont calculées les réflexions et les réfractions. La radiance en chaque point est estimée à partir d'une moyenne des énergies issues des photons se trouvant à proximité. Pour cela la carte de photon doit être optimisée afin de pouvoir trouver rapidement les photons voisins à un point. Classiquement on utilise un BSP.

Cette méthode présente l'avantage de décorréler l'éclairage de la géométrie permettant de mieux simuler les milieux participatifs (fumée, brouillard, etc.) et la réflectance sous surfacique (peau, lait, marbre, etc.).

Radiosité



Présentation du modèle :

Le modèle de Radiosité, proposé par C.M. Goral en 1984, se base sur la théorie du transfert radiatif de chaleur adaptée à la lumière. Sous sa forme classique, cette méthode pose trois hypothèses restrictives :

- La scène est composée d'un nombre fini de petits éléments plans nommés patches ou surfels considérés de radiosité constante.
- Toutes les surfaces de la scène sont lambertiennes c'est à dire opaques et parfaitement diffuses.
- Le système est fermé et les objets sont placés dans le vide.

Un algorithme de Radiosité parvient ainsi à simuler les inter-réflexions diffuses de façon très réaliste.

Suivant ces hypothèses, l'équation du rendu se simplifie. La BRDF ne dépendant plus de la direction, elle peut être sortie de l'intégrale sous forme d'une simple réflectance :

$$L_r(x, \vec{\omega}_r) = L_e(x, \vec{\omega}_r) + \rho(x) \int_S L_r(x', \vec{\omega}'_r) G(x, x') dx x'$$

Équation 17 : équation de rendu dans le cas diffus

Dés lors, on peut écrire la radiosité B_j du patch j de la façon suivante :

$$B_j = E_j + \rho_j \sum_{i \neq j} B_i F_{ij}$$

Équation 18 : Radiosité

E_j étant l'émission (diffuse) propre du patch j

ρ_j la réflectance du matériau.

F_{ij} le facteur de forme géométrique entre les éléments i et j.

$$\text{avec } F_{ij} = \frac{1}{A_j} \int_{x \in P_i} \int_{y \in P_j} \frac{\cos \theta_i \cdot \cos \theta_j}{\pi \cdot r^2} dx dy \quad \text{si } P_i \text{ visible depuis } P_j$$

$$F_{ij} = 0 \text{ sinon.}$$

Le facteur de forme est un terme purement géométrique, fonction de l'orientation mutuelle des patches.

Les surfaces de la scène doivent être subdivisées en éléments suffisamment petits pour que l'on puisse les considérer de radiosité constante.

Finalement, on obtient un système d'équations donnant la radiosité de chaque élément en fonction de tous les autres. Le problème peut se présenter sous forme matricielle comme suit :

$$[M] \times [B] = [E]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\rho_1 F_{12} & \cdots & -\rho_1 F_{1n} \\ -\rho_2 F_{21} & 1 & \cdots & -\rho_2 F_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\rho_n F_{n1} & -\rho_n F_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_n \end{bmatrix}$$

Équation 19 : Système d'équation de la radiosité

Cette équation matricielle possède des propriétés intéressantes :

- La matrice M est à diagonale dominante stricte.
- Les éléments de la diagonale sont strictement positifs, les autres négatifs ou nuls.
- Les éléments du vecteur E sont tous positifs ou nuls.

Résolution du système

Pour résoudre le système $Mx=B=E$ ou B est l'inconnue il faut inverser la matrice M. Cette opération n'est pas envisageable sur les ordinateurs actuels dans un temps fini car la dimension, n (nb de patches), est généralement trop grande (milliers ou millions).

Les solutions que l'on est capable de calculer sont des solutions partielles. Elles sont obtenues par des méthodes itératives plus couramment appelées méthodes de **Radiosité Progressive**.

En remarquant que la matrice M est diagonale et symétrique on peut utiliser la méthode de résolution algébrique de **Jacobi**. Cette méthode se base sur la décomposition de M en L et U, respectivement, la matrice triangulaire supérieure et la matrice triangulaire inférieure. Nous avons donc :

$$Mx = (L+U)x = Lx + Ux = b$$

Jacobi introduit la notion de suite :

$$Lx^{k+1} + Ux^k = b$$

Il suffit ensuite d'écrire x^{k+1} en fonction de x^k

$$x^{k+1} = L^{-1}b - L^{-1}Ux^k$$

Si x^0 est choisi correctement, on montre que la suite converge.

Physiquement, dans le cas du calcul de la radiosité, on attribue à x^0 E, l'émission propre de chaque patch. A chaque itération et pour chaque patch, on collecte (**gathering**) l'énergie reçue. A l'itération suivante on place l'énergie reçue dans l'énergie à émettre.

Une variante de cette méthode consiste à utiliser l'itération de **Gauss-Seidel** qui remet à jour l'énergie à émettre à chaque collecte (et non à chaque itération). Cette méthode converge donc plus rapidement.

Enfin la méthode de **Southwell** résout le système par colonne (contrairement à Jacobi ou Gauss-Seidel qui sont des méthodes de résolution par ligne). Ici on émet l'énergie (**shooting**) plutôt que de la collecter (**gathering**). Si, à chaque itération, on choisi le patch qui émet le plus d'énergie on obtient rapidement une solution visuellement acceptable.

Calcul du facteur de forme

Avant tout notons deux propriétés du facteur de forme :

$$A_i \cdot F_{ij} = A_j \cdot F_{ji}$$

Et si P_j et P_k sont des patch disjoints :

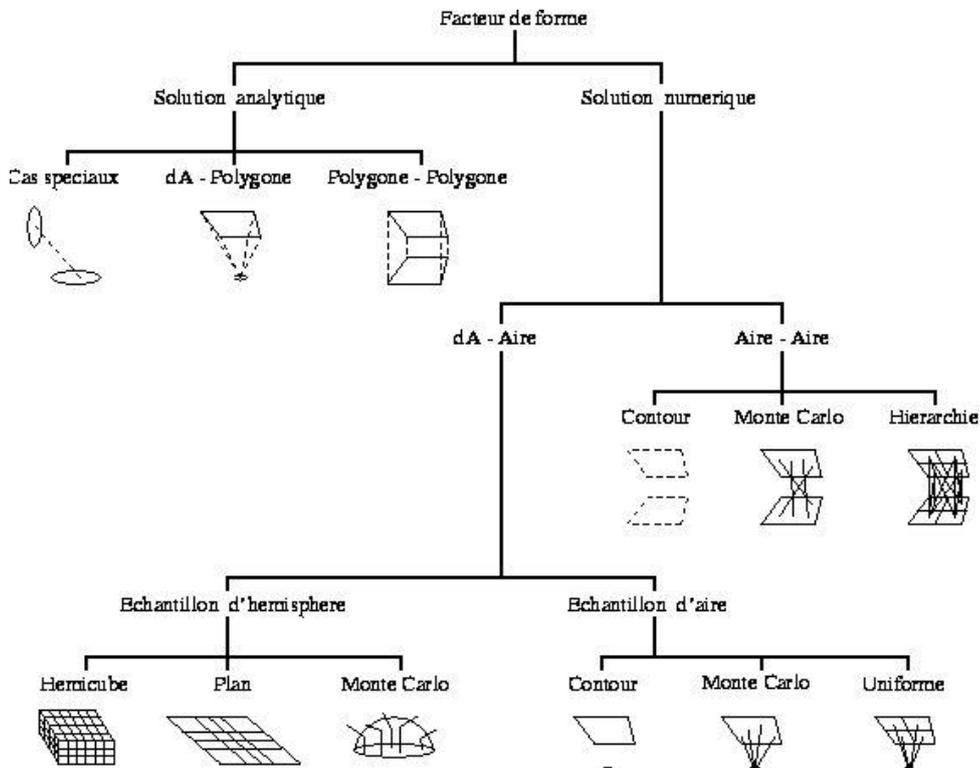
$$F_{i(j \cup k)} = F_{ij} + F_{ik}$$

La résolution la double intégrale $F_{ij} = \frac{1}{A_i} \int_{x \in P_i} \int_{y \in P_j} \frac{\cos \theta_i \cdot \cos \theta_j}{\pi \cdot r^2} dx dy$ n'est pas triviale même si la

visibilité est totale entre P_i et P_j .

Dans la pratique on est capable de résoudre cette équation, en un temps raisonnable, que dans des cas très simples (patch sphériques ou carrés, orientations des normales perpendiculaires ou parallèles). Il est toutefois possible d'approcher la solution dans des cas complexes par une intégration de Monte-Carlo.

En utilisant la propriété d'additivité énoncée ci-dessus on peut décomposer un cas complexe en cas simples.



Hémicube de Cohen

En 1985 Cohen introduit la méthode de l'hémicube pour calculer le facteur de forme. C'est une méthode simple à comprendre et, sur tout, qui permet d'utiliser les cartes graphiques 3D pour accélérer le calcul.

La première idée est de dire que, lorsque la distance entre P_i et P_j est suffisamment grande, le facteur de forme $F_{ij} = F_{A_i \rightarrow A_j}$ est équivalent à $F_{dA_i \rightarrow A_j}$ d'où :

$$F_{ij} \approx \int_{y \in P_j} \frac{\cos \theta_i \cdot \cos \theta_j}{\pi \cdot r^2} dy$$

Ensuite pour calculer $F_{dA_i \rightarrow A_j}$ Cohen utilise l'analogie de Nusselt qui dit que le facteur de forme est proportionnel à l'aire de la double projection du patch P_j sur l'hémisphère de centre P_i puis sur le disque formant la base de l'hémisphère.

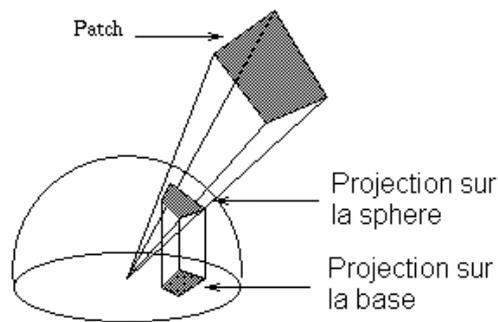


Figure 56 Analogie de Nusselt

La double projection n'étant toujours pas simple à calculer, on place un hémicube centré sur le patch i . Chaque face de l'hémicube est subdivisée de façon à obtenir un maillage uniforme.

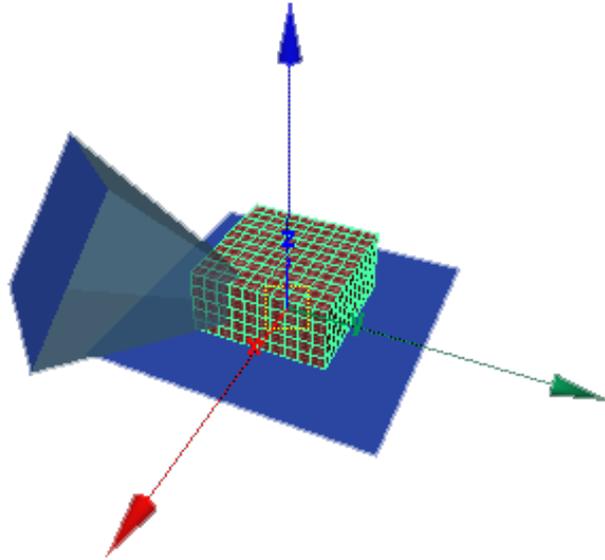


Figure 57 Hemicube de cohen

Le delta facteur de forme de chaque cellule peut être calculé facilement :

$$\Delta F_q = \frac{\cos \theta_i \cdot \cos \theta_j}{\pi \cdot r^2} \Delta A$$

Donc

$$\Delta F_q = \frac{z}{\pi \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^2} \Delta A$$

Rem : on à toujours x ou y ou z = 1 ou -1.

En utilisant les propriétés d'additivité on peut facilement déduire un facteur de forme complexe en sommant les delta facteurs de formes inclus dans la projection du patch sur l'hémicube.

La projection peut être calculée par lancer de rayons ou en effectuant un rendu en Zbuffer en s'appuyant sur les fonctions de la carte graphique.

Note : Si l'on utilise la résolution de Southwell, on peut calculer en une seule fois une colonne de facteur de forme (càd tout les ff entre Pi et les autres patch de la scène) en attribuant une couleur a chaque patch.

Annexes

Définitions générales

Angle solide

Extension tri-dimensionnelle de l'angle 2D. Un angle solide est utilisé pour mesurer la portion d'espace occupée par un objet vu depuis un point et ainsi caractériser une direction.

Définition : L'angle solide sustenté par un objet depuis un point P , est l'aire de la projection de cet objet sur une sphère unitaire centrée au point P . Son unité est le **stéradian** (sr).

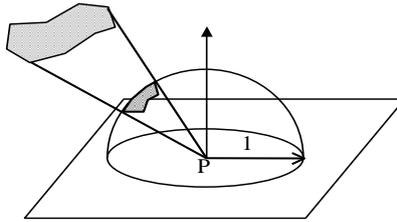


Figure 58 : angle solide

Caustique

Définition : Concentration de lumière produite sur une surface par un objet de matière transparente et due au coefficient de réfraction du matériau. Exemple: la tache lumineuse produite, sur une table, par la lumière du soleil passant au travers d'un verre.

Corps Noir

Définition : Corps hypothétiquement parfait qui absorbe l'ensemble du rayonnement qu'il reçoit et dont l'émissivité est maximale.

Diagramme Goniométrique

Définition : Représentation graphique d'une fonction de distribution sphérique.

Gamma

Définition : La réponse d'un canon à électron à une impulsion électrique n'est pas linéaire. De ce fait la luminance des luminophores d'un écran CRT n'est pas proportionnelle à l'impulsion électrique produite par la carte graphique. La courbe Gama corrige ce défaut.

Gamut

Définition : Le gamut est une cartographie de l'espace des couleurs disponibles pour un périphérique donné. On utilise habituellement les espaces CIE xyY ou L*a*b* pour le représenter.

Goniophotomètre

Définition : Appareil de mesure de la BRDF. Mécaniquement ou optiquement, cet appareil vient relever la réflectance pour toutes les directions d'observation et toutes les directions d'illumination.

Définition de radiométrie

Bidirectional Reflectance Distribution Function (BRDF)

Fonction de distribution de la réflectance bidirectionnelle.

La BRDF donne un coefficient de proportionnalité entre l'énergie incidente et l'énergie réfléchie, ceci pour toutes les directions d'incidence et de réflexion. Elle caractérise donc la façon dont va réagir un matériau donné à un flux d'énergie lumineuse.

Définition : on appelle BRDF le rapport entre la **luminance** réfléchie dans la direction ω_r , $L_r(\omega_r)$, et l'**éclairement** depuis la direction ω_i qui le produit, $L_i(x, \omega_i) \cdot \cos \theta_i \cdot d\omega_i$. Cette fonction est positive, car elle représente une distribution et appartient à l'intervalle $[0, \infty]$. Cette fonction a pour unité le sr^{-1} (concentration de flux, en stéradian).

$$\rho_{bd}(x, \vec{\omega}_i, \vec{\omega}_r) = \frac{L_r(x, \vec{\omega}_r)}{E(x, \vec{\omega}_i)} = \frac{L_r(x, \vec{\omega}_r)}{L_i(x, \vec{\omega}_i) \cdot \cos \theta_i \cdot d\omega_i}$$

Équation 20 : définition de la BRDF

Flux

Définition : Énergie quittant ou arrivant sur une surface donnée par unité de temps. Unité le Watt (W)

Intensité de rayonnement

Définition : Flux émit ou reçu en un point par unité d'angle solide. Unité $\text{W}\cdot\text{sr}^{-1}$.

$$I(x, \vec{\omega}) = \frac{d\phi_e}{d\omega}$$

Équation 21 : définition de l'intensité de rayonnement

Irradiance (EN) - Eclairement (FR)

Définition : L'éclairement E d'une surface est la puissance arrivant en un point d'une surface, par unité d'aire. Son unité est le $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$.

$$E(x, \vec{\omega}) = \frac{d\phi_i(\vec{\omega})}{dA}$$

Équation 22 : définition de l'éclairement

Isotropie

Définition : On dit qu'une surface est isotrope si sa réponse à une onde lumineuse incidente dépend uniquement de l'angle polaire d'incidence et non de son azimut.

Radiance (EN) - Luminance (FR)

Définition : la luminance L est la quantité d'énergie voyageant en un point selon une direction donnée, par unité de temps, par unité d'aire perpendiculaire à la direction de déplacement, par unité d'angle solide. Son unité est le $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{sr}^{-1}$.

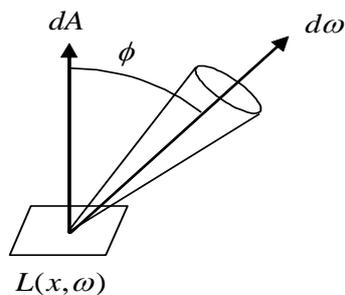


Figure 59 : luminance

$$L(x, \vec{\omega}) = \frac{d^2\phi_e(\vec{\omega})}{dA \cos(\theta) d\omega}$$

Équation 23 : définition de la luminance

θ : Angle entre $\vec{\omega}$ et la normale à la surface dA

Radiosité :

Définition : la radiosité M d'une surface est la puissance quittant cette surface par unité d'aire. Son unité est W.m^{-2} .

$$M(x, \vec{\omega}) = \frac{d\phi_r(\vec{\omega})}{dA}$$

Équation 24 : définition de la radiosité

Remarque: Souvant on désigne par radionité $B(x) = M(x, \Omega)$

Réfectance

Définition : la réflectance est définie comme étant le rapport entre le flux réfléchi et le flux incident. Cette grandeur n'a pas d'unité.

Par définition, le flux réfléchi est toujours plus faible que l'incident (loi de conservation de l'énergie) donc ce taux est plus petit que 1.

Définition de photométrie

Photométrie :

Définition : Science de la mesure psychophysique de la sensation visuelle produite par un spectre électromagnétique.

Flux lumineux :

Définition : Energie lumineuse totale émise par une source ou reçue par une surface, perçue par l'œil humain, selon le facteur de visibilité relatif établi par la CIE. Unité: le Lumen (lm).

$$\phi(\lambda_0) = 680V(\lambda_0)\phi_e(\lambda_0)$$

$$\Phi = 680 \int_0^{\infty} V(\lambda)\phi_e(\lambda)d\lambda$$

$\phi(\lambda_0)$ Flux lumineux.

Φ Le flux lumineux pour un spectre donné

$\phi_e(\lambda)$ Le flux (radiométrie) du spectre pour une longueur d'onde donné

$V(\lambda)$ Est la courbe de sensibilité relative de l'œil humain moyen.

Intensité lumineuse :

Définition : Flux lumineux traversant un point de l'espace par unité d'angle solide. Unité: le Candéla ($cd = lm.sr^{-1}$)

Eclairement lumineux :

Définition : Flux lumineux parvenant en une surface par unité d'aire. Unité: le lux ($lm.m^{-2}$)

Luminance lumineuse :

Définition : Intensité lumineuse par unité d'aire. Unit: $cd.m^{-2} = lux.sr^{-1} = lm.m^{-2}.sr^{-1}$

Tableau récapitulatif. Radiométrie/Photométrie

| Concept Physique | Terme radiométrique | Unités radiométriques | Terme photométrique | Unités photométriques | Symbole |
|---------------------------|---------------------|-------------------------------|----------------------|--|---------|
| Energie | Energie radiante | Joule [$J = kg m^2 s^{-2}$] | Energie lumineuse | Talbot | W |
| Flux | Flux | Watt [$W = J s^{-1}$] | Flux lumineux | Lumens [Talbot/s] | Φ |
| Densité Angulaire de Flux | Luminance | $[W m^{-2} sr^{-1}]$ | Luminance lumineuse | Candela/ m^2 ou Lux/sr ou lumens/ $sr.m^2$ | L |
| Densité de Flux | Éclairement | $[W m^{-2}]$ | Eclairement lumineux | Lux [lumens/ m^2] | E |
| Densité de Flux | Radiosité | $[W m^{-2}]$ | Luminosité | Lux [lumens/ m^2] | B |
| Intensité | Intensité | $[W sr^{-1}]$ | Intensité lumineuse | Candela [lumens/sr] | I |

Tableau 1 : Comparaison des unités radiométriques et photométriques