

UNIVERSITE PAUL SABATIER & INPT
Formation Doctorale en Informatique
DEA & Doctorats
Informatique de l'Image et du Langage (2IL)

Année 1998-99
Laboratoire IRIT

Radiance & ondelettes sphériques

par Thomas Muller

Directeur de recherche : Monsieur le Professeur R. CAUBET
Responsable de stage : Monsieur M. Paulin

Mots Clés : Photo-réalisme, Radiance, radiosité directionnelle, environnements non diffus, compression par ondelettes.

Résumé : La méthode de radiosité permet de simuler l'illumination globale d'une scène virtuelle de manière très réaliste. Cependant, elle ne prend en compte que les interactions diffuses. Pour un rendu photo-réaliste, il faut pouvoir simuler tous types d'interactions. Il est possible d'étendre la méthode de radiosité au transport directionnel de l'énergie, donc au calcul de la radiance. Mais la complexité et la quantité de donnée générées par un tel algorithme ne permettent pas d'obtenir une solution dans un temps fini. Nous proposons donc ici une représentation de la radiance compressée par ondelettes, une algèbre associée ainsi que son utilisation dans un algorithme de type Gauss-Seidel

Abstract: The radiosity method allows to simulate the global illumination of a virtual scene. However, it just looks for diffuse interactions. For a photo-realistic rendering we need to care about all types of interactions. The radiosity method can be extended to manage directional transport of radiance. But it takes a lot of memory space and time, so we present here a wavelet compressed representation of the radiance, an algebra and a Gauss-Seidel algorithm implementation well suited to our needs.

Remerciements

Je remercie M. Fariñas Del Cerro, directeur de l'IRIT, de m'avoir accueilli dans son laboratoire.

Je remercie M. le professeur René Caubet, directeur de recherche du Laboratoire de Synthèse d'Images, de m'avoir permis d'assouvir ma passion pour la synthèse d'images.

Je remercie Mathias Paulin pour son encadrement, ses explications et ses conseils avisés.

Je remercie toute l'équipe de synthèse d'images pour son aide, son accueil et la bonne ambiance qui règne dans les bureaux.

Je remercie l'ensemble de mes collègues de DEA pour avoir toujours gardé leur calme face à mes questions "tri-cabeloctomiesques" et pour les heures de travail acharnées en salle B13.

Radiance & ondelettes sphériques	1
1 Introduction	7
2 Les modèles d'éclairage	8
1.1 Introduction	8
1.2 Notions sur les ondes électromagnétiques.....	8
équations de Maxwell.....	8
Réflexion et réfraction.....	10
Quelques définitions de radiométrie.....	10
2.1.1.1 Angle solide.....	11
2.1.1.2 Radiance	11
2.1.1.3 Irradiance	11
2.1.1.4 Radiosité :.....	12
2.1.1.5 Isotropie.....	12
2.1.1.6 Bidirectional Reflectance Distribution Function (BRDF).....	12
2.1.1.7 Réflectance	12
1.3 Modèle Mathématique : Equation du rendu	13
1.4 Les modèles d'illumination locale.....	14
Modèle de Lambert.....	14
Spécularité pure	15
Modèle de Phong.....	16
Modèle de Cook-Torrance.....	17
Lancer de rayons.....	19
Méthodes de Monte-Carlo	20
1.5 Modèle d'illumination global : La Radiosité.....	21
Présentation du modèle :.....	21
Le facteur de forme et représentation matricielle	22
Résolution.....	23
1.6 Conclusion	24
3 Extension de la Radiosité aux surfaces non diffuses.....	25
1.7 Introduction	25
1.8 Formulation sur les éléments finis.....	25
1.9 Méthode du cube englobant.....	26
1.10 Méthode par extension du facteur de forme	27
1.11 Utilisation des harmoniques sphériques pour représenter la fonction de distribution de la radiance	28
1.12 Radiance par ondelettes	29
4 Notre approche de l'illumination Réaliste.....	31
1.13 Introduction	31
1.14 Base d'ondelettes sphériques et Compression.....	32
Discretisation de la sphère unitaire.....	32
4.1.1.1 Définition.....	32
4.1.1.2 Implémentation.....	34
Lifting scheme sur une base sphérique.....	37
4.1.1.3 Définition.....	37
4.1.1.4 Adaptation à notre problématique	38
Compression	39
4.1.1.5 Résultats.....	40
4.1.1.6 Discussion sur la BRDF	41
1.15 Définition d'une algèbre et de la structure des fonctions	42

Algèbre	42
Construction de fonctions	43
1.16 Simulation d'éclairage	44
Modélisation discrète	44
4.1.1.7 Radiance discrète	44
4.1.1.8 Réflectance discrète	45
4.1.1.9 Modèle mathématique	45
4.1.1.10 Explication :	46
4.1.1.11 Erreurs et approximations	47
Transport de l'énergie	49
4.1.1.12 Angle solide discrétisé	50
4.1.1.13 Transformée d'un angle solide en une combinaison d'angles solides élémentaires	51
4.1.1.14 Algorithme de discrétisation :	51
4.1.1.15 Conclusion	53
Application des algorithmes de Radiosité à notre modèle de radiance	54
4.1.1.16 Facteur de forme	55
4.1.1.17 Radiosité hiérarchique	55
4.1.1.18 Maillage de discontinuité	55
5 développements futurs	55
6 Conclusion	57
7 Références bibliographiques	58
A. Ondelettes	59
Un exemple simple : la base de Haar	59
Exemple de transformation	59
Généralisation et Analyse multi-résolution	61
Généralisation	64
Fonction de dilatation et décomposition	65
B. Planches de test	67
C. résultats	69

Figure 1 : géométrie de la réflexion / transmission	10
Figure 2 : angle solide	11
Figure 3 : radiance	11
Figure 4 : géométrie de la réflexion / transmission	13
Figure 5 : Géométrie pour le modèle de Lambert	14
Figure 6 : Géométrie pour un matériau spéculaire pur	15
Figure 7 : Géométrie pour le modèle de Phong	16
Figure 8 : Représentation de la réponse d'un matériau selon le modèle de Cook-Torrance	17
Figure 9 : Illustration du facteur d'atténuation géométrique	18
Figure 10 : Le lancer de rayons	19
Figure 11 : Tracé de chemins	20
Figure 12 : Géométrie pour le facteur de forme	22
Figure 13 : Cube englobant pour la radiosité directionnelle	26
Figure 14 : Illustration du facteur de forme étendu	27
Figure 15 : Réponse d'un matériau spéculaire diffus à un rayon lumineux incident	28
Figure 16 : Exemple d'harmoniques sphériques	28
Figure 17 : Formation de la radiance	29
Figure 18 : Mapping d'une hémisphère sur un carré unitaire	30
Figure 19 : Subdivision récursive d'un octaèdre	32
Figure 20 : Subdivision d'un triangle	32
Figure 21 : Projection d'une arête subdivisée de l'octaèdre	33
Figure 22 : Subdivision/projection d'un octaèdre	33
Figure 23 : numérotation des sommets ,des faces et orientation de l'octaèdre	34
Figure 24 : numérotation des sommets des triangles	34
Figure 25 : numérotation des fils et des sommets des fils	35
Figure 26 : numérotation des voisins	35
Figure 27 : chaînage des bandes d'un tableau creux	40
Figure 28 : addition de deux bandes	42
Figure 29 : Addition de deux tableaux creux compressés	43
Figure 30 : Diagramme des classes	43
Figure 31 : radiance discrète	44
Figure 32 : intégration de la radiance discrète	47
Figure 33 : Erreur dans l'émission de l'énergie	48
Figure 34 : Conservation de l'énergie	49
Figure 35 : Combinaison d'angles solides élémentaires	51
Figure 36 : intersection de deux triangles	52
Figure 37 : géométrie d'intersection	53
Figure 38 scène expérimentale	54
Figure 39 : hologramme	56

Équation 1 : équations de Maxwell dans le vide	9
Équation 2 : loi de la Réflexion	10
Équation 3 : indice de réfraction.....	10
Équation 4 : loi de Snell-Descartes.....	10
Équation 5 : radiosité.....	12
Équation 6 : définition de la BRDF	12
Équation 7 : réflectance directionnelle réfléchie	13
Équation 8 : équation de réflectance.....	13
Équation 9 : équation générale du rendu	14
Équation 10 : BRDF lambertienne	15
Équation 11 : radiance diffuse	15
Équation 12 : brdf spéculaire.....	15
Équation 13 : modèle de Phong.....	16
Équation 14 : terme diffus pour Cook-Torrance.	17
Équation 15 : équation de rendu dans le cas diffus	21
Équation 16 : Radiosité.....	21
Équation 17 : Facteur de forme.	22
Équation 18 : Système d'équation de la radiosité.....	23
Équation 19 : radiance discrète.....	25
Équation 20 : radiance discrète.....	26
Équation 21 : Fonction d'échelle.....	37
Équation 22 : ondelettes	37
Équation 23 : Fonction d'échelle.....	38
Équation 24 : Itération de la transformée en ondelettes	38
Équation 25 : Itération de la reconstruction du signal	38
Équation 26 : réflectance discrète.....	45
Équation 27 : équation générale de rendu discrétisée par ondelettes	45

1 Introduction

L'un des buts de la synthèse d'image est de produire des images de scènes virtuelles générées par ordinateur indifférenciable de photographies de scènes réelles. Un certain nombre de modèles ont été développés depuis les débuts de l'infographie pour approcher le photoréalisme. Aux premiers modèles, purement géométriques, ont succédé des simulations d'éclairage plus ou moins empiriques (Phong, Cook-Torrance...). Par la suite, le lancer de rayon, introduit par Whitted, permet de simuler les réflexions spéculaires avec de très bons résultats. Mais il ne permet pas de prendre en compte des réflexions de nature diffuse (un terme "d'intensité ambiante" qui n'a pas de réalité physique, est habituellement ajouté). Ces algorithmes dits d'illumination locale n'étant pas satisfaisants, des chercheurs des universités d'Hiroshima et de Cornell proposent en 1984 un nouveau modèle : la radiosité. Basée sur des éléments finis, c'est une méthode d'illumination globale qui, d'un point de vue thermodynamique, modélise les échanges énergétiques entre éléments de surface. Mais la radiosité, dans sa forme classique, ne gère que les interactions purement diffuses, ce qui contraint à ne pouvoir simuler que des matériaux dits lambertiens tels le plâtre, la craie...etc. Une scène réelle n'est, généralement, pas constituée uniquement de ce type de matériaux. Il est courant, par exemple en architecture, d'avoir besoin de faire des simulations d'éclairages sur des matériaux tel que le bois ciré, les peintures laquées ou bien de pouvoir visualiser les "taches" lumineuses que produit, sur le sol, la réflexion d'une lampe dans un miroir.

L'équation générale de rendu [Kaj86] donne une solution analytique à l'équilibre énergétique d'une scène en calculant la radiance en chaque point. C'est à dire l'énergie par unité d'angle solide et d'aire qui part de ce point, ceci pour toutes directions.

Au cours de ce DEA, nous proposerons une modélisation discrète de la radiance sous forme d'ondelettes sphériques dérivées des travaux de Peter Schröder et Wim Sweldens [Sch95] et de Mathieu Robart [Rob99]. Une algèbre générique permettant de manipuler radiance, réflectance, BRDF où toute autre fonction définie sur une sphère sera développée ainsi qu'un opérateur de transport, ceci afin de propager la radiance (donc une information directionnelle) dans un algorithme de radiosité classique. Le but étant d'obtenir des images réalistes pour tout type de matériaux sans que les temps de calcul et l'espace mémoire utilisé ne soient excessifs, nous nous intéresserons donc aussi à la structuration des données en mémoire ainsi qu'à l'élaboration d'une base sphérique multi-résolution adaptative.

2 Les modèles d'éclairage

1.1 Introduction

La recherche du réalisme en image de synthèse passe par la simulation du trajet de la lumière dans un environnement donné. En effet les matériaux qui composent une scène vont émettre, diffuser, réfléchir, réfracter et absorber une certaine quantité d'énergie lumineuse. Ce sont ces interactions qui vont être perçues par l'œil (ou par une caméra). On voit donc qu'il faut s'intéresser à l'énergie lumineuse, à sa distribution spatiale ainsi qu'à la manière dont réagissent les matériaux à un tel flux énergétique.

Ici, après un court rappel des notions d'électromagnétisme et de radiométrie, nous abordons un certain nombre de modèles mathématiques et informatiques qui ont été développés par le monde de la recherche en infographie. Parmi ces modèles, on distingue deux classes :

- les modèles d'illumination locaux qui déterminent l'influence des sources lumineuses sur un objet sans tenir compte de l'influence des autres objets.
- Les modèles d'illumination globaux visant à résoudre la distribution de l'énergie dans la scène.

Généralement ces modèles ne développent pas toutes les interactions ou se placent dans le cadre d'hypothèses restrictives ou bien encore, ne donnent qu'une solution partielle dans un temps fini, ceci de façon à rendre le problème calculable par un ordinateur.

1.2 Notions sur les ondes électromagnétiques

La plupart des modèles d'éclairage reposent sur des bases physiques car la lumière dite visible est une onde électromagnétique de longueur d'onde comprise entre 400nm et 700nm. Elle voyage grâce à un phénomène qui peut se produire dans le vide, la **radiation**. En cela, elle est considérée comme une énergie. Toutefois certains modèles, tel le lancer de photon, s'attachent plus à la nature corpusculaire de la lumière.

équations de Maxwell

La théorie de l'électromagnétisme repose sur quatre équations fondamentales : les **équations de Maxwell**. Ces équations décrivent le comportement d'une onde électromagnétique, dans le vide ou dans un milieu matériel. Cette description possède une formulation plus simple dans le vide, car elle nécessite l'utilisation d'un moins grand nombre de grandeurs physiques nécessaires à la description du matériau traversé. C'est cette formulation qu'emploient généralement les modèles d'illumination.

Ainsi, la lumière est une énergie transportée par une paire de champs couplés :

- le **champ électrique E**,
- le **champ magnétique B**.

Ces champs sont liés à deux champs d'induction :

- un **champ d'induction électrique** (ou de déplacement électrique),
- un **champ d'induction magnétique**.

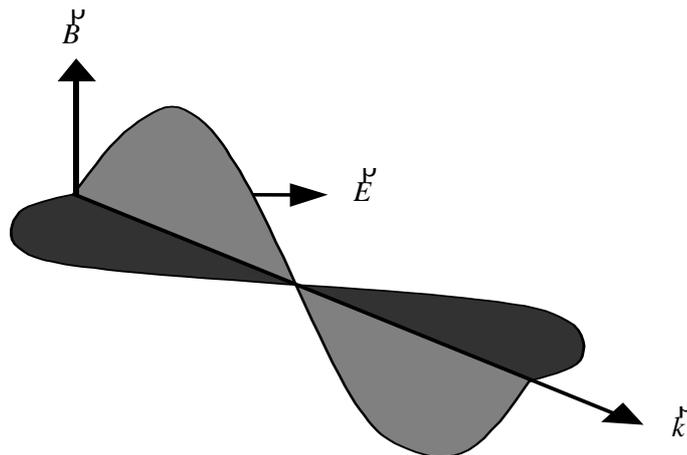
Ces quatre champs représentent quatre notions à manipuler, liées entre elles par les quatre équations de Maxwell.

Ces champs sont créés par la présence d'une charge en un point de l'espace et se manifestent en tout point du même espace. On est donc en présence d'un effet mutuel.

En tout point, les quatre équations de Maxwell décrivent **localement** l'état de ces champs.

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

Équation 1 : équations de Maxwell dans le vide



Réflexion et réfraction

On peut déduire des équations de Maxwell les lois de **Descartes-Snell** qui décrivent les relations angulaires entre le rayon incident et les rayons réfléchis ou transmis.

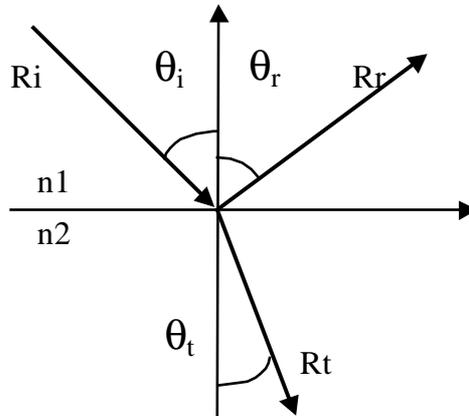


Figure 1 : géométrie de la réflexion / transmission

$$\theta_i = \theta_r$$

Équation 2 : loi de la Réflexion

L'angle réfléchi θ_i est égal à l'angle réfracté θ_r , par contre le rayon R_t est transmis suivant un angle dépendant de l'indice de réfraction.

$$n = \frac{c}{v}$$

Équation 3 : indice de réfraction

c : célérité de la lumière dans le vide.

v : célérité de la lumière dans le matériau.

$$n_1 \cdot \sin \theta_i = n_2 \cdot \sin \theta_t$$

Équation 4 : loi de Snell-Descartes

n_1 étant l'indice de réfraction du milieu d'origine

n_2 celui du nouveau milieu.

Quelques définitions de radiométrie

Comme nous l'avons dit, la lumière voyage par **radiation**. Nous donnons donc ici des définitions de grandeurs physiques caractérisant ce mode de transport. Ces grandeurs dépendent implicitement de la longueur d'onde.

2.1.1.1 Angle solide

La description précise des échanges d'énergie rayonnante dans l'espace nécessite l'introduction de la notion d'**angle solide**, qui est l'extension tri-dimensionnelle de l'angle 2D entre deux droites. Un angle solide est utilisé pour mesurer la portion d'espace occupée par un objet vu depuis un point et ainsi caractériser une direction.

Définition : l'angle solide sustenté par un objet depuis un point P , est l'aire de la projection de cet objet sur une sphère unitaire centrée au point P . Son unité est le **stéradian** (sr).

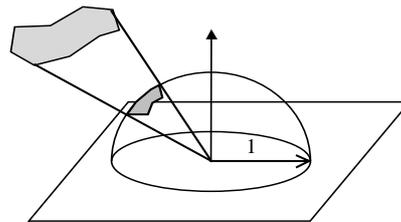


Figure 2 : angle solide

2.1.1.2 Radiance

Définition : la radiance L est la quantité d'énergie voyageant en un point selon une direction donnée, par unité de temps, par unité d'aire perpendiculaire à la direction de déplacement, par unité d'angle solide. Son unité est le **$W.m^{-2}.sr^{-1}$** .

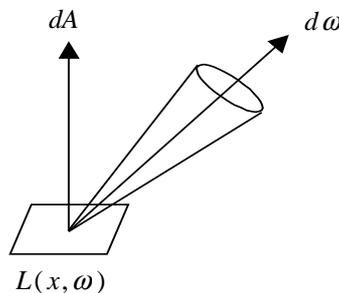


Figure 3 : radiance

La distribution de la radiance caractérise complètement la distribution de la lumière dans une scène. toutes les autres grandeurs radiométriques peuvent être calculées à partir de la radiance.

2.1.1.3 Irradiance

La définition de la radiance implique une notion de direction. Une autre grandeur est l'énergie totale incidente à une surface, par unité d'aire : l'**irradiance** E .

Définition : l'irradiance E d'une surface est la puissance totale arrivant en un point d'une surface, par unité d'aire. Son unité est le **$W.m^{-2}$** .

2.1.1.4 Radiosité :

La radiosité B est très similaire à l'irradiance : alors que l'irradiance est l'énergie incidente à une surface par unité d'aire, la radiosité est l'énergie quittant une surface par unité d'aire.

Définition : la radiosité B d'une surface est la puissance totale quittant cette surface par unité d'aire. Son unité est $W.m^{-2}$.

On en déduit donc :

$$B = \int_{\Omega} L_o \cdot \cos\theta \cdot d\omega$$

Équation 5 : radiosité

où L_o est la radiance quittant la surface.

2.1.1.5 Isotropie

Définition : on dit qu'une surface est isotrope si sa réponse à une onde lumineuse incidente dépend uniquement de l'angle polaire d'incidence et non de son azimut.

Il est important de tenir compte de cette propriété, car elle peut être essentielle au réalisme de certains matériaux présentant un caractère directionnel (métal brossé, bois, etc.).

2.1.1.6 Bidirectional Reflectance Distribution Function (BRDF)

Définition : on appelle BRDF le rapport entre la **radiance** réfléchie dans la direction ω_r , $L_r(\omega_r)$, et l'**irradiance** différentielle depuis la direction ω_i qui la produit, $L_i(\omega_i) \cdot \cos\theta_i \cdot d\omega_i$. Cette fonction est positive, car elle représente une distribution et appartient à l'intervalle $[0, \infty]$. Cette fonction a pour unité le sr^{-1} (concentration de flux, en stéradian).

La BRDF donne un coefficient de proportionnalité entre l'énergie incidente et l'énergie réfléchie, ceci pour toutes les directions d'incidence et de réflexion. Elle caractérise donc la façon dont va réagir un matériau donné à un flux d'énergie lumineuse.

$$\rho_{bd}(\omega_i, \omega_r) = \frac{L_r(\omega_r)}{L_i(\omega_i) \cdot \cos\theta_i \cdot d\omega_i}$$

Équation 6 : définition de la BRDF

2.1.1.7 Réflectance

Définition : la réflectance est définie comme étant le rapport entre le flux réfléchi et le flux incident. Cette grandeur n'a pas d'unité.

On considère le rapport entre le flux réfléchi et le flux incident. Par définition, le flux réfléchi est toujours plus faible que l'incident (loi de conservation de l'énergie) donc ce taux est plus petit que 1.

Définition : la réflectance directionnelle réfléchie $\rho(\omega_r)$ correspond au ratio de lumière diffusée dans une direction de l' hémisphère de réflexion pour une direction d'incidence fixée.

$$\rho_d(\omega_r) = \rho_{bd}(\omega_i, \omega_r) \cdot \cos \theta_i$$

Équation 7 : réflectance directionnelle réfléchie

Dans la suite de ce document nous nommons réflectance la réflectance directionnelle réfléchie lorsqu'il n'y a pas de confusion possible.

1.3 Modèle Mathématique : Equation du rendu

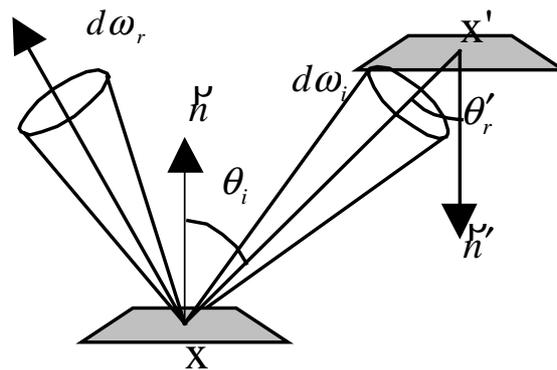


Figure 4 : géométrie de la réflexion / transmission

L'équation de réflectance donne la distribution de la lumière réfléchie en un point en fonction de la BRDF en ce point et de la distribution de la lumière incidente.

$$L_r(x, \omega_r) = \int_{\Omega_i} \rho_{bd}(x, \omega_i, \omega_r) L_i(x, \omega_i) \cos \theta_i d\omega_i$$

Équation 8 : équation de réflectance

Le calcul de la distribution de la lumière incidente correspond à la recherche d'un modèle d'éclairage. J.T. Kajiya [KAJ86] a proposé en 1986 une formulation générale de ce modèle :

$$L_r(x, \omega_r) = L_e(x, \omega_r) + \int_S \rho_{bd}(x, \omega_i, \omega_r) \cdot L(x', \omega_i) \cdot G(x, x') dx'$$

Équation 9 : équation générale du rendu

$L_e(x, \omega_r)$ est la radiance propre émise au point x dans la direction ω_r .

$G(x, x')$ est appelé **facteur de forme différentiel**. C'est un terme purement géométrique qui représente l'atténuation du flux en fonction de l'orientation mutuelle des normales aux points x et x' .

si x visible depuis x'

$$G(x, x') = \frac{\cos \theta_i \cos \theta_r}{\pi d^2} \quad \text{avec } d \text{ la distance séparent les points } x \text{ et } x'$$

sinon

$$G(x, x') = 0$$

Bien que l'équation générale de rendu ne prenne pas en compte la diffraction et la polarité de la lumière on peut en déduire la plupart des modèles d'illumination. Ces modèles passent généralement par la discrétisation et/ou simplification de l'équation car l'intégrale ne peut être résolu directement par un ordinateur. Il faut noter toutefois, la méthode de Monte-Carlo [Sill94] qui vise à approcher cette intégrale par un échantillonnage statistique.

1.4 Les modèles d'illumination locale

Modèle de Lambert

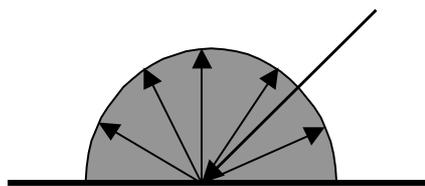


Figure 5 : Géométrie pour le modèle de Lambert

Ce modèle, qui correspond aux surfaces parfaitement diffuses (et qui donc est un cas limite), est décrit par une BRDF constante. Ceci signifie que la luminance réfléchie est indépendante de la direction de réflexion :

$$\rho_{bd} = \frac{\rho_d}{\pi}$$

Équation 10 : BRDF lambertienne

ρ_d est le coefficient de diffusion compris entre 0 et 1

$$\text{donc } L_r(x, \omega_r) = \frac{\rho_d}{\pi} E(x)$$

Équation 11 : radiance diffuse

$E(x)$ est l'irradiance au point x

Spécularité pure

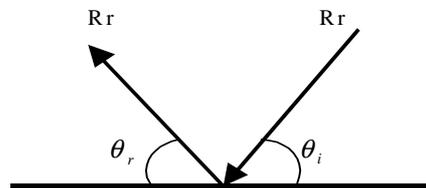


Figure 6 : Géométrie pour un matériau spéculaire pur

Pour modéliser la spécularité pure qui est aussi un cas limite, on définit la BRDF de la façon suivante :

$$\rho_{bd}(x, \omega_i, \omega_r) = \frac{\delta(\cos \theta_i - \cos \theta_r)}{\cos \theta_i} \delta(\Phi_i - (\Phi_r \pm \pi))$$

Équation 12 : brdf spéculaire

Où δ est la fonction de Dirac qui retourne 1 lorsqu'on lui passe 0 en paramètre, 0 sinon.

La BRDF est donc égale à $1/\cos \theta_i$ lorsque la direction d'incidence, la direction réfléchie et la normale sont dans un même plan et que ces directions sont symétriques par rapport à la normale. Dans tous les autres cas la BRDF est nulle. Notons qu'ici les lois de **Descartes** sont bien respectées.

Rappelons que la radiance s'exprime ainsi :

$$L_r(x, \omega_r) = \int_{\Omega_i} \rho_{bd}(x, \omega_i, \omega_r) L_i(x, \omega_i) \cos \theta_i d\omega_i$$

donc $L_r(x, \omega_r) = L_i(x, \omega_i)$ pour ω_r, ω_i respectant la loi de **Descartes** sur la réflexion spéculaire pure.

Modèle de Phong

Le modèle d'éclairage le plus utilisé à l'heure actuelle pour un affichage "temps réel" est celui défini par B.T. Phong en 1975 [Pho75]. C'est un modèle totalement empirique qui ne respecte ni le principe de conservation de l'énergie ni le principe de réciprocité de Helmholtz. Pourtant il permet dans des temps de calculs très courts de générer des images un peu réalistes.

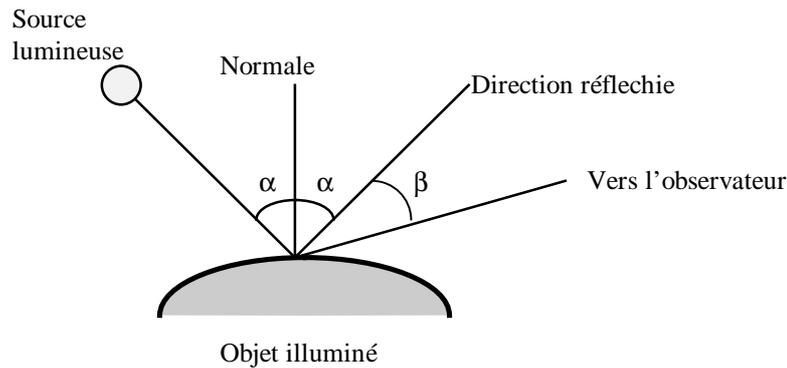


Figure 7 : Géométrie pour le modèle de Phong.

$$I(P) = k_d I_{\text{ambient}} + \sum_{i \leq N} k_d \cdot \cos \alpha_i \cdot I_i + \sum_{i \leq N} k_s(\alpha) \cdot \cos^n \beta_i \cdot I_i$$

Équation 13 : modèle de Phong

I_{ambient} est une estimation de l'intensité ambiante

N est le nombre de sources,

$I(P)$ est l'intensité totale au point P

k_d est le coefficient de diffusion au point P ,

α_i est l'angle entre la normale et la direction de la source i

I_i est l'intensité de la source i ,

n est l'exposant de Phong

$k_s(\alpha_i)$ est le coefficient de réflexion au point P (dépend de α_i)

β est l'angle entre la direction réfléchie et celle de l'observateur

Le modèle de Phong peut malgré tout se déduire de l'équation générale de rendu en ne tenant compte, en chaque point, que des directions d'incidences provenant des sources lumineuses. Ainsi il crée une impression de volume pour les objets de la scène. Mais comme il ne tient pas compte de toutes les interactions lumineuses, on voit apparaître un terme d'intensité ambiante qui n'a pas de justification physique. De plus seul sont calculées les ombres propres aux objets et non leurs ombres portées. Ce modèle n'est donc pas pleinement satisfaisant.

Modèle de Cook-Torrance

Le modèle Torrance-Sparrow [Tor67], développé en physique appliquée, est un modèle physique d'une surface irrégulière réfléchissante. Il a été d'abord adapté en synthèse par Blinn puis implanté par Cook-Torrance [Coo 81].

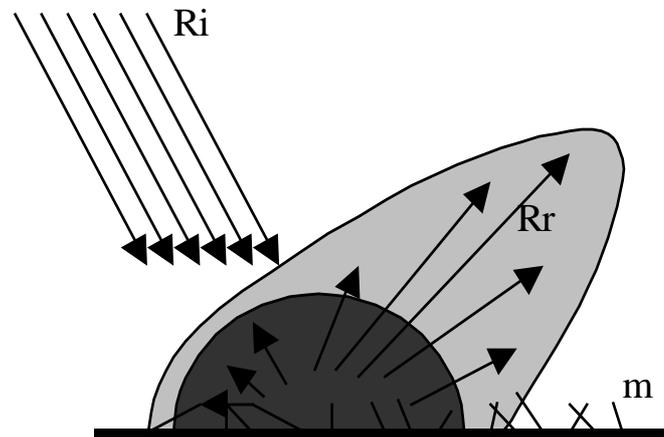


Figure 8 : Représentation de la réponse d'un matériau selon le modèle de Cook-Torrance

Ri : rayons incidents.

Rr : rayons réfléchis par les microcassettes.

m : microfacettes.

En gris foncé : la réponse purement diffuse du matériau.

En gris clair : réponse du matériau.

Dans ce modèle, la surface est supposée être composée d'un ensemble de facettes microscopiques planes et isotropes, se comportant chacune comme un réflecteur parfait. La géométrie et la distribution de ces **microfacettes**, ainsi que la direction incidente de la source lumineuse, déterminent l'intensité et la direction de la réflexion spéculaire.

Pour la composante diffuse de la réflectance, le modèle utilise la loi de Lambert :

$$\rho_d = \frac{d}{\pi} k_d$$

Équation 14 : terme diffus pour Cook-Torrance.

Avec :

d : la proportion de surface se comportant comme un réflecteur diffus.

k_d : la proportion de lumière réfléchi par le réflecteur diffus.

Pour la composante spéculaire de la réflectance, Cook et Torrance utilisent :

$$\rho_s = \frac{F_\lambda}{\pi} \frac{D \cdot G}{(N \cdot V)(N \cdot L)}$$

D est la fonction de distribution de l'orientation des microfacettes.

G est le facteur d'atténuation géométrique, qui représente les effets de masque et d'ombrage entre les microfacettes elles-mêmes

F_λ est le terme de Fresnel.

N est le vecteur normal de la surface.

V est la direction d'observation

L est la direction d'illumination.

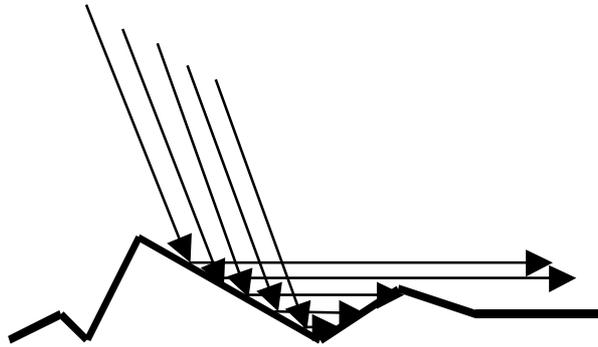


Figure 9 : Illustration du facteur d'atténuation géométrique

Fonction de distribution des microfacettes

Chaque microfacette se comporte comme un réflecteur pur. Ainsi, le modèle ne prend en compte que les microfacettes dont la normale correspond au vecteur moyen H entre les directions d'incidence et de réflexion. Seule une fraction D des microfacettes ont cette orientation. Plusieurs distributions peuvent être utilisées : Torrance et Sparrow ont choisi une distribution gaussienne, Blinn une distribution de Trowbridge et Reitz, et Cook-Torrance celle utilisée par Beckmann (équation ci-dessous).

$$D = \frac{1}{4m^2 \cos^4 \beta} e^{-\frac{\tan^2 \beta}{m^2}}$$

β l'angle entre N et H .

m la pente rms moyenne des microfacettes. Quand m est faible, les pentes des microfacettes varient peu par rapport à la surface

Lancer de rayons

Plus qu'un modèle, cet algorithme né en 1968 n'est réellement exploité pour synthétiser l'éclairage d'une scène qu'à partir de 1980. Dans son article Whitted [Whi80] présente plusieurs images avec des effets optiques alors inédits. Actuellement le rendu par lancer de rayons est utilisé dans la plupart des logiciels de rendu pour produire des images réaliste de qualité. Bien que n'étant pas adapté à une utilisation interactive, la puissance sans cesse croissante des ordinateurs permet d'obtenir des résultats dans des temps raisonnables. Toutefois nous allons voir qu'il souffre de certaines lacunes rédhibitoires pour atteindre un photo-réalisme parfait.

```

pour chaque pixel de l'écran faire
  {
    définir le rayon primaire œil pixel ;
    pour chaque objet faire
    {
      tester les intersections ;
      prendre la plus proche ;
    }
    relancer des rayons vers les sources lumineuses ;
    lancer un rayon dans la direction de réflexion ;
    lancer un rayon dans la direction de réfraction ;
    calculer l'éclairement du point d'intersection ;
    affecter la couleur du pixel ;
  }

```

Le principe consiste à lancer des rayons qui partent de l'œil et passent au travers d'une "grille de pixel" formant l'image virtuelle. La couleur d'un pixel est calculée à partir du premier objet que rencontre le rayon dit primaire. De cette intersection sont lancés des rayons secondaires vers les sources lumineuses et éventuellement dans les directions de réflexion et de réfraction. Ainsi de suite jusqu'à obtenir la couleur du pixel par combinaison des énergies reçues. On voit que le modèle d'éclairage utilisé est une extension de celui de Phong, ici l'on prend en compte les réflexion, les réfraction, et les ombres portées. Mais on va voir ici aussi apparaître un terme ambiant sans plus de justification d'un point de vue physique.

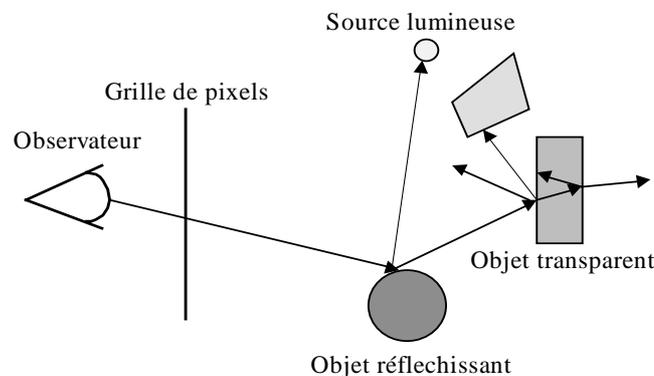


Figure 10 : Le lancer de rayons

On remarque que les rayons suivent le trajet inverse de la lumière. Pourtant de ce point de vue le modèle reste valide car il respecte le principe de réciprocité de Helmholtz et les lois de **Descartes**. Par contre l'échantillonnage trop faible des directions ne permet pas de prendre en compte les inter-réflexions diffuses. Ainsi un objet mat, non directement éclairé par une source lumineuse, ne sera visible que grâce au terme d'intensité ambiante. Les images générées par des algorithmes de lancer de rayons souffrent donc d'un aspect synthétique... Peut être que la notion d'aspect synthétique est née de cet algorithme ! ! ? ?

Méthodes de Monte-Carlo

Les méthodes de Monte-Carlo sont des méthodes probabilistes qui reposent sur des tirages aléatoires. Elles peuvent être utilisées pour résoudre des problèmes déterministes tel l'intégration d'une fonction. Dans ce cas la méthode consiste à effectuer un tirage aléatoire sur l'intervalle d'intégration qui va permettre de définir un estimateur primaire de l'aire sous la courbe. Sur un grand nombre de tirages, la moyenne des estimateurs primaire permet de définir un estimateur secondaire ... ainsi de suite jusqu'à obtenir une valeur approchée de l'intégrale.

Cette méthode peut s'appliquer à l'équation générale de rendu comme l'a montré Kajiya en 1986 [Kaj86] par la méthode du tracer de chemins.

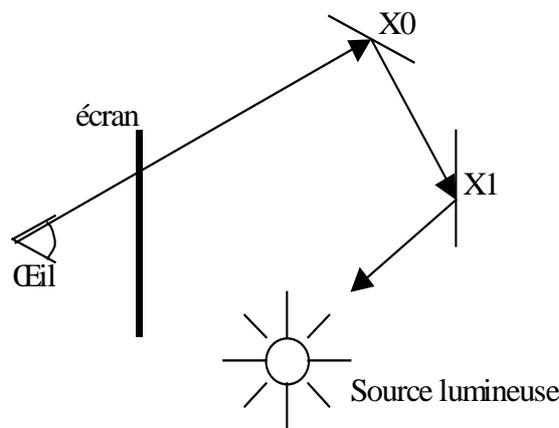


Figure 11 : Tracé de chemins

La méthode du tracé de chemins consiste à construire une marche aléatoire X_0, X_1, \dots, X_n en partant de l'œil et en passant par un pixel donné. Le rayon arrivant en un X_i est renvoyé dans une direction aléatoire donnée par une fonction de densité de probabilité spécifique au matériau. Lorsque une source lumineuse étendue est atteinte cela contribue à une estimation de la valeur du pixel. C'est donc après un grand nombre de chemins tracés que l'on obtient une bonne estimation du pixel. Cette méthode un peu brutale donne de très bons résultats mais converge dans des temps souvent excessifs. De plus elle se prête mal à l'optimisation car la stratégie ne tient pas compte de la configuration de la scène à traiter.

Il faut noter qu'il existe aussi une méthode duale du tracé de chemin : le tracé de photons. Ici on suit le parcours de la lumière jusqu'à atteindre l'œil.

1.5 Modèle d'illumination global : La Radiosité

Présentation du modèle :

Le modèle de Radiosité, proposé par C.M. Goral en 1984 [Gor84], se base sur la théorie du transfert radiatif de chaleur adaptée à la lumière. Sous sa forme classique cette méthode pose trois hypothèses restrictives :

- La scène est composée d'un nombre fini de petits éléments de surface plans nommés patches ou surfels considérés de radiosité constante (*voir def. 2.2.3.4*).
- Toutes les surfaces de la scène sont lambertiennes c'est à dire opaques et parfaitement diffuses.
- Le système est fermé et les objets sont placés dans le vide.

Un algorithme de Radiosité parvient ainsi à simuler les inter-réflexions diffuses de façon très réaliste.

Suivant ces hypothèses l'équation du rendu se simplifie. La BRDF ne dépendant plus de la direction elle peut être sortie de l'intégrale sous forme d'une simple réflectance :

$$L_r(x, \omega_r) = L_e(x, \omega_r) + \rho(x) \int_S L(x', \omega_r') G(x, x') dx'$$

Équation 15 : équation de rendu dans le cas diffus

!

Alors on peut écrire la radiosité B_j du patch j de la façon suivante :

$$B_j = E_j + \rho_j \sum_{i \neq j} B_i F_{ij}$$

Équation 16 : Radiosité

E_j étant l'émission (diffuse) propre du patch j

ρ_j la réflectance du matériau.

F_{ij} le facteur de forme géométrique entre les éléments i et j .

Le facteur de forme et représentation matricielle

Le facteur de forme est un terme purement géométrique fonction de l'orientation mutuelle des patches.

$$F_{ij} = \frac{1}{\pi A_j} \frac{\cos \theta_i \cos \theta_j}{d(dA_i, dA_j)^2} \text{vis}(dA_i, dA_j) dA_j dA_i$$

Équation 17 : Facteur de forme.

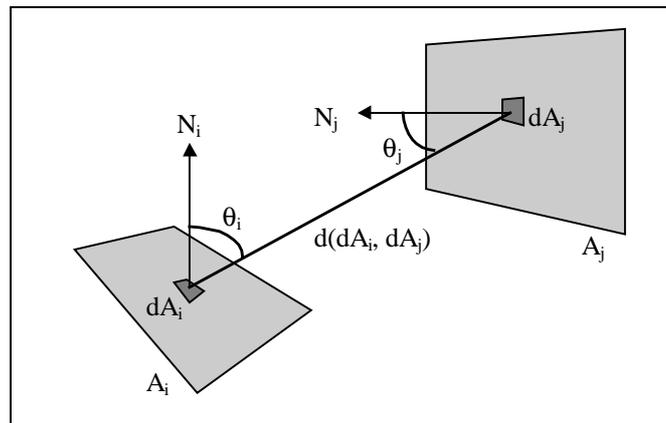


Figure 12 : Géométrie pour le facteur de forme

$\text{vis}(dA_i, dA_j)$ représente la visibilité entre les deux surfaces élémentaires.

$d(dA_i, dA_j)$ est la distance entre les surfaces élémentaires.

Les surfaces de la scène doivent donc être subdivisées en éléments suffisamment petits pour que l'on puisse les considérer de radiosité constante. Un certain nombre de recherches visent à optimiser cette subdivision, on notera en particulier la Radiosité hiérarchique introduite par Hanrahan en 1991 [Han91][Pau95] et le maillage de discontinuité décrit par Dani Lischinski en 1992 [Lis92][Bon98]. Nous ne développons pas plus ces algorithmes dans ce document mais il faut noter qu'ils ne sont pas à priori incompatible avec les modèles que nous proposons.

Finalement on obtient un système d'équation donnant la radiosité de chaque élément en fonction de tous les autres. Le problème peut se présenter sous forme matricielle comme suit.

$$[M] \times [B] = [E]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\rho_1 FF_{12} & \Lambda & -\rho_1 FF_{1n} \\ -\rho_2 FF_{21} & 1 & \Lambda & -\rho_2 FF_{2n} \\ \text{M} & \text{M} & \text{O} & \text{M} \\ -\rho_n FF_{n1} & -\rho_n FF_{n2} & \Lambda & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \text{M} \\ B_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \text{M} \\ E_n \end{bmatrix}$$

Équation 18 : Système d'équation de la radiosité

Cette équation matricielle possède des propriétés intéressantes :

- La matrice M est à diagonale dominante stricte.
- Les éléments de la diagonale sont strictement positifs, les autres négatifs ou nuls.
- Les éléments du vecteur E sont tous positifs ou nuls.

Résolution

Deux méthodes ont été proposées par Goral en 1984 [Gor84] pour résoudre ce système :

Méthode de Gauss-Seidel :

pour chaque élément i

$$B_i = E_i$$

tant que non convergence faire

pour chaque élément i

$$B_i = E_i + \rho_i \sum_{j \neq i} B_j FF_{ji}$$

Méthode de Southwell :

pour chaque élément i

$$B_i = E_i$$

$$\Delta B_i = E_i$$

tant que non convergence faire

prendre i tel que $\Delta B_i * A_i$ est le plus grand

pour chaque élément j

$$B_j = B_j + \Delta B_i \rho_j FF_{ji}$$

$$\Delta B_j = \Delta B_j + \Delta B_i \rho_j FF_{ji}$$

$$\Delta B_i = 0$$

Le problème de la méthode de Gauss-Seidel est qu'il faut calculer et stocker toute la matrice des facteurs de forme avant de pouvoir faire la résolution. La méthode de Southwell ne nécessite par contre de stocker et de calculer qu'une colonne de la matrice des facteurs de forme par itération. La méthode de Gauss-Seidel converge par contre beaucoup plus vite que la méthode de Southwell.

1.6 Conclusion

Parmi les différents modèles que nous avons vus, seul le lancer de rayons et la Radiosité atteignent un bon niveau de réalisme tout en présentant une solution dans un temps relativement court. Pourtant la radiosité produit des images photo-réalistes mais dans des conditions trop restrictives pour être appliqué à une scène quelconque, alors que le lancer de rayons fournit lui, une “belle” image mais, de façon plus ou moins empirique (donc non photo-réaliste).

Ces deux modèles étant complémentaires, certains travaux ont cherché à définir des méthodes hybrides tel la méthode de Sillion et Puech [Sil89] qui consiste en une passe de radiosité suivie d’une passe de lancer de rayon réduit(sans calculs d’ombrages). Mais, bien que la qualité des résultats soit exceptionnellement bonne, les temps de calculs sont très long et toutes les inter-réflexions ne sont pas prises en compte.

Une autre approche consiste à étendre un modèle de façon à le rendre plus performant. On peut par exemple voir la méthode de Monte Carlo comme une extension du lancer de rayon. Dans cette optique il semble prometteur de vouloir étendre la Radiosité aux matériaux non diffus. La radiosité est selon nous une bonne base pour le développement d’un algorithme de synthèse photo-réaliste car il traite l’information de façon globale et donne des résultats parfaitement en accord avec les lois de la physique. La recherche est à l’heure actuelle encore très active dans ce domaine, nous en donnons un aperçu dans le chapitre suivant.

3 Extension de la Radiosité aux surfaces non diffuses

1.7 Introduction

Calculer la radiosité sur des surfaces non lambertiennes implique le retour de la fonction de réflectance (brdf) dans l'intégrale de l'équation de rendu. Les simplifications qui en découlaient ne peuvent donc, bien évidemment, pas être faites. Dans la littérature on parle alors de radiosité directionnelle, on devrait plutôt parler de fonction de distribution de la radiance car la radiosité est normalement défini comme la somme sur l'hémisphère de réflexion de la radiance en un point, elle est donc indépendante de la direction de réflexion.

Rappelons la forme de l'équation générale de rendu :

$$L_r(x, \omega_r) = L_e(x, \omega_r) + \int_S \rho_{bd}(x, \omega_l, \omega_r) \cdot L(x', \omega_l) \cdot G(x, x') dx'$$

Bien que l'on conserve les autres hypothèses de la radiosité (discrétisation de la scène, radiance constante sur le patch...) la présence de la BRDF rend le problème bien plus difficile à résoudre. D'un point de vue algorithmique, la quantité d'information nécessaire au calcul de la distribution de la réflectance est bien plus importante. Car pour pouvoir calculer la radiance en un point x suivant un algorithme de radiosité il faut connaître l'intensité lumineuse provenant de tous les autres points de la scène. Ce qui signifie qu'il faut connaître en permanence la radiance de tous les points de la scène. De plus la distribution de la radiance n'est pas une fonction lissée, il est donc difficile de la représenter analytiquement.

1.8 Formulation sur les éléments finis

L'idée de base de la méthode de Radiosité est de modéliser les transferts d'énergie continus par un ensemble d'éléments finis (les patches) considérés de radiosité constante. Nous allons donc discrétiser l'équation de rendu à la fois sur les surfaces et sur les directions de l'espace.

$$L_{kl} = L_e(x_k, \omega_l) + \sum_i \int_{\Omega_j} N_{ij}(x_k, \omega_l) L_{ij}$$

Équation 19 : radiance discrète

L_{kl} : radiance du point k dans la direction l

$L_e(x_k, \omega_l)$: émission propre

$$N_{ij}(x_k, \omega_l) = \int_{\omega \in -\Omega_j} \rho_{bd}(x_k, \omega_l, \omega) \cdot \delta_i(x_k, \omega) \cdot \cos \theta \cdot d\omega$$

$\delta_i(x_k, \omega)$ étant une fonction de dirac égale à 1 si du point x_k dans la direction ω on voit le point i, égale à zéro sinon.

Cette formulation exprime que la radiance d'un patch k dans une direction discrète donnée est une combinaison linéaire des radiances émises par les autres patches de la scène dans la direction de k.

Remarque : une direction discrète j peut être vue comme étant un angle solide. Ω_j étant le domaine angulaire de cet angle solide et ω_j une direction donnée appartenant à Ω_j . De la même façon x_i est un point du patch i.

1.9 Méthode du cube englobant

La formulation en éléments fini que nous venons de voir peut encore se simplifier si l'on suppose que depuis un point x et dans une direction discrète j, un seul patch est visible. On peut de plus faire l'hypothèse que la fonction de réflectance est constante sur cet angle solide. Ceci suppose une discrétisation de l'espace des directions d'autant plus fine que les patches sont petits.

Alors la radiance sur l'élément k prend la forme :

$$L_{kl} = L_e(x_k, \omega_l) + \int_j \rho_{bd}(x_k, \omega_l, -\omega_j) L_{v_k(j)} \cos \theta d\omega_{\omega \in -\Omega_j}$$

Équation 20 : radiance discrète

avec $v_k(j)$ l'indice de l'élément visible depuis k dans la direction discrète -j

La méthode consiste alors à échantillonner l'espace des direction sur un cube pour chaque patches [Sill94]. Ainsi pour chacune des directions du cube on pourra stocker une radiance directionnelle discrète considérée constante sur l'angle solide ainsi défini. Tous les cubes ont la même orientation, ainsi il est facile de calculer l'intersection de la droite passant par le centre de deux patches et des cubes englobants.

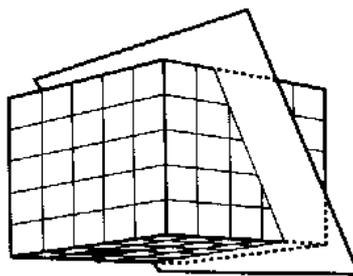


Figure 13 : Cube englobant pour la radiosité directionnelle

La résolution de cette équation peut se faire de façon itérative comme pour la radiosité classique. il faut noter que l'intégrale représente le delta facteur de forme associé à la direction j, il doit être calculé une fois seulement lors de l'initialisation de l'algorithme. Après le calcul de l'éclairage, la scène peut être visualisée grâce à un algorithme de lancer de rayons primaires de façon à voir apparaître l'aspect ciré de certains matériaux, ou bien même les réflexions (si l'échantillonnage est très fin).

Cette méthode pose toutefois un certain nombre de problèmes. Les effets spéculaires ayant normalement une forte fréquence spatiale, les résultats présentent des problèmes d'aliassage. De plus l'algorithme nécessite le stockage d'informations de visibilité pour chaque patchs et dans toutes les directions. Malgré tout, les temps de calculs sont de l'ordre de $O((n.m)^2)$, n étant le nombre de patchs et m le nombre de directions sur le cube englobant. Pour une scène simple les calculs peuvent prendre plusieurs semaines sur une machine actuelle. Le fait que tous les cubes soient égaux représente aussi une limitation, en effet toutes les BRDF n'ont pas besoin d'une même discrétisation de l'espace des directions.

1.10 Méthode par extension du facteur de forme

Habituellement le facteur de forme F_{ij} représente la proportion de l'énergie total quittant le patch i parvenant au patch j . Il est possible de définir un facteur de forme étendu F_{ij}^{Ext} [Sha88] comme étant l'énergie totale quittant le patch i qui atteint le patch j après un nombre quelconque de réflexions spéculaires.

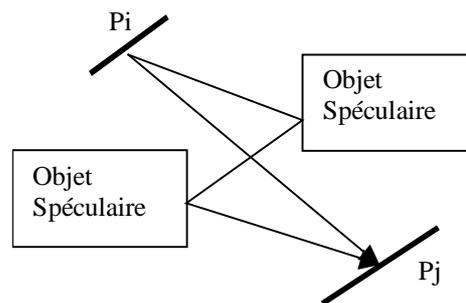


Figure 14 : Illustration du facteur de forme étendu

Cette méthode s'utilise dans un algorithme de radiosité classique, seule le calcul de l'ensemble des facteurs de forme est modifié à l'initialisation. Généralement cette méthode est incluse dans un algorithme en deux passes, c'est à dire que la visualisation se fait par lancer de rayon pour rendre les effets d'optique dépendent du point de vue. Mais les images produites résultent de la superposition des phénomènes radiatifs de diffusion pure et de specularité idéale alors que les matériaux naturels présentent une infinie variation entre ces deux cas limites. Dans la pratique seul un nombre fini de réflexions spéculaires sont prises en compte.

1.11 Utilisation des harmoniques sphériques pour représenter la fonction de distribution de la radiance

François X. Sillion a présenté en 1989 [Sil94] une représentation générale de la radiance sur la base d'harmoniques sphériques. Le but étant d'arriver à dépasser les limitations des modèles précédents. C'est à dire ne pas se limiter aux cas extrêmes (diffus et/ou spéculaire) tout en limitant la masse de données à traiter.

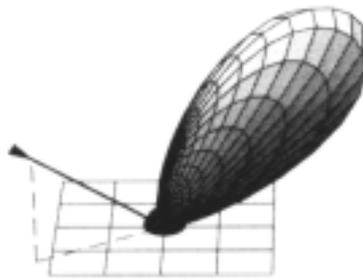


Figure 15 : Réponse d'un matériau spéculaire diffus à un rayon lumineux incident

Lorsqu'une énergie lumineuse atteint un point suivant une direction incidente caractérisée par un angle polaire, elle est réfléchiée dans toutes les directions suivant une distribution fixée par la BRDF. La réponse (radiance directionnelle) ainsi générée peut alors être ajoutée à la radiance déjà présente en ce point. C'est en suivant ce raisonnement que François X. Sillion propose de modéliser les radiances directionnelles incidentes à un patch muni de l'opérateur d'addition de façon à générer la radiance en ce patch. Pour cela il utilise les harmoniques sphériques qui sont des fonctions lissées (splines) notées $Y_{l,m}(\theta, \phi)$ où $0 \leq l \leq \infty$ et $-l \leq m \leq l$. Ces fonctions forment une base orthogonale pour les directions sur la sphère unitaire. On peut donc approximer la fonction de distribution de la radiance, grâce à un vecteur de N coefficients pour une telle base. De ce point de vue on peut comparer la transformée en harmoniques sphérique avec la transformée de Fourier.

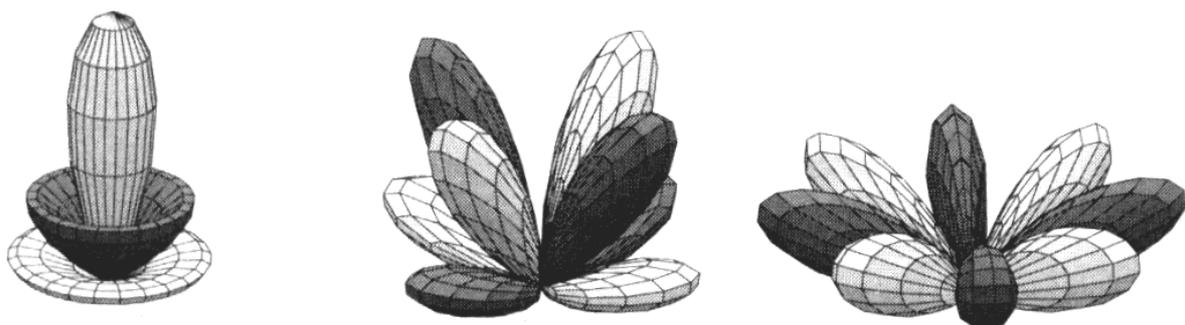


Figure 16 : Exemple d'harmoniques sphériques

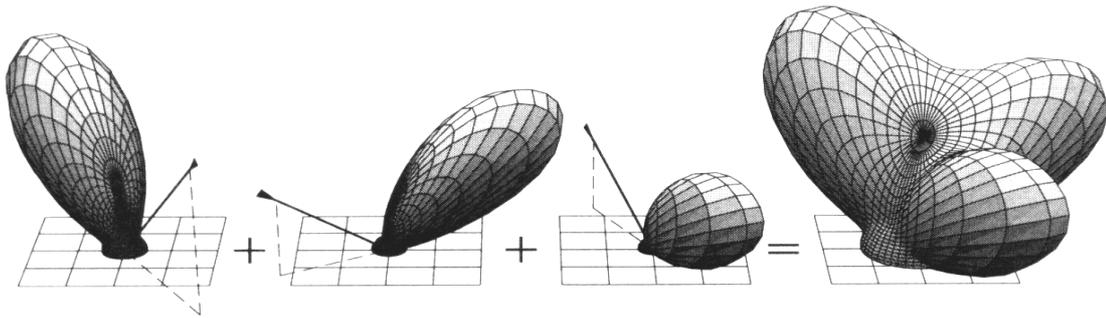


Figure 17 : Formation de la radiance

Pour l'application de ce modèle à la radiosité classique, la double intégrale sur la BRDF dans les directions d'incidences et de réflexion, doit être pré-calculée. Heureusement une scène contient généralement un nombre limité de matériaux. Pour la BRDF chaque harmonique sphérique peut être représentée elle même par un vecteur de coefficients. Le facteur de forme quand à lui est calculé une fois seulement lors de l'initialisation de la scène, un seul facteur de forme par patch est utilisé pour toutes les directions.

Ce modèle présente l'avantage de donner une approximation continue de la radiance avec un nombre de coefficients réduits. De plus, une fois sélectionnée une réflectance directionnelle à partir de la BRDF et de la direction incitante il suffit de multiplier cette réflectance par la valeur de l'intensité incidente pour obtenir la contribution sous forme de radiance directionnelle à ajouter à la radiance de l'élément concerné. Cette opération n'augmente donc pas le nombre de coefficients utilisés.

Les faiblesses de ce modèle se situent au niveau du mode de transport de l'énergie lumineuse. Pour un angle solide d'émission donné on ne sait pas calculer analytiquement l'énergie distribuée par une représentation harmonique. La radiance est alors considérée constante sur cet angle solide. Il est alors clair que pour que le modèle soit valide d'un point physique il faut des angles solides petits et donc un maillage très fin de la scène. Cette remarque empêche toute optimisation sur le maillage.

1.12 Radiance par ondelettes

Les ondelettes, voir annexe 1, ont d'abord été utilisées dans les algorithmes de Radiosité pour représenter la variation de radiosité sur les surfaces [Gor93] et définir une structure de donnée compressée. Puis en 1994, constatant que la principale difficulté du calcul de la radiance provient de l'énorme quantité d'information à traiter, trois équipes de chercheurs [Chr94][Sum94][Sch94] proposent une formulation de la radiance sous forme d'ondelettes.

L'idée maîtresse est de reprendre une formulation en éléments finis de la radiance et de la projeter sur une base d'ondelette pour pouvoir ensuite la compresser. Les ondelettes semblent en effet bien adaptées à la fonction de distribution de la radiance car elles permettent une reconstruction locale de l'information sans régénérer totalement le signal d'origine. ce qui est nécessaire lors de la résolution du système pour le transport de l'énergie lumineuse.



Figure 18 : Mapping d'une hémisphère sur un carré unitaire

Dans la méthode de Per H. Christensen [Chr94] l'espace des directions est discrétisé sur la sphère unitaire par une paramétrisation angulaire classique. Ensuite la sphère est projetée puis étirée de façon à couvrir un carré unitaire. C'est sur cette base géométrique qu'est appliquée la transformée en ondelettes.

La base d'ondelettes peut alors être une base classique de Haar ou une base non standard. L'intérêt d'une base non standard est qu'elle peut permettre de traiter à la fois la radiance en un point (suivant deux coordonnées angulaires) et la variation de cette radiance sur une surface (deux coordonnées spatiales).

Les propriétés de multi-résolution des ondelettes permettent de donner une valeur approchée plus ou moins fine de la distribution de la radiance d'un élément, ce qui permet d'adapter la qualité du transfert suivant la géométrie (patches éloignés) et la quantité d'énergie transportée. Dans ces méthodes le facteur de forme est calculé de façon classique, il forme donc un critère géométrique possible.

Ici la contribution énergétique d'un point x à un point y passe par la reconstitution de la valeur de la radiance de y dans la direction de x à partir de la fonction de base ϕ et des ondelettes ψ pour le vecteur de coefficients $V(\text{dir}(y,x))$.

Ces méthodes donnent de très bons résultats dans un temps et un espace mémoire réduit. Pourtant la discrétisation de l'espace des directions ne semble pas satisfaisant, les angles solides définis par la base géométrique ne représentent pas tous la même surface sur la sphère unitaire. Cette non uniformité rend difficile la gestion de l'erreur sur l'éclairage. Par exemple un pic spéculaire sera mieux défini si il s'oriente verticalement que suivant une pente de 45° . De plus l'aspect multi-résolution des ondelettes n'est pas mis à contribution de façon optimale avec ce genre de base géométrique.

4 Notre approche de l'illumination Réaliste

1.13 Introduction

Nous avons vu que pour améliorer le réalisme des images produites par un algorithme de simulation d'éclairage il faut un modèle qui prend en compte tous types de matériaux, il doit aussi permettre la simulation de toutes les interactions radiatives qui existent naturellement entre deux surfaces. Ce modèle doit donc se conformer à l'équation générale de rendu ! Malheureusement les ordinateurs actuels ne sont pas capables de résoudre cette équation dans un temps fini. Parmi les différents modèles existants nous avons noté que la Radiosité fournissait des résultats photo-réalistes sous certaines hypothèses dont la discrétisation de la scène. Si de plus on discrétise l'espace des directions, pour ne pas se limiter aux surfaces lambertiennes, les résultats sont spectaculaires tant au niveau de la qualité du rendu que de la quantité de données à traiter. En effet une simple BRDF mesurée et échantillonnée tous les 6 degrés sur 4 degrés angulaires (direction d'incidence, direction de réflexion) prend facilement 25 Mega-octet de mémoire. Avec un tel échantillonnage une direction discrète (angle solide) balaye approximativement un centimètre carré à un mètre de distance ce qui est encore relativement grossier. Dans les mêmes conditions une réponse sur une surface va nécessiter 15 Ko de mémoire, donc pour une scène de complexité moyenne de 10000 patches cela représente 150 Mo de mémoire vive. La compression par ondelettes des données en mémoire semble donc une approche intéressante comme nous l'avons vu.

Une nouvelle base d'ondelettes (de seconde génération) a été présentée en 1995 par Peter Schröder et Wim Sweldens. Elle permet de représenter sur une sphère, de façon discrète et multi-résolution, une fonction tel la BRDF, la réflectance ou la radiance. Pour nos travaux nous proposons donc d'utiliser ce type de base adaptée au transfert radiatif.

Une foi définie sous forme d'ondelettes, BRDF, réflectance et radiance sont des objets que l'on veut pouvoir compresser. Nous développons donc dans un premier temps une base géométrique sphérique adaptative d'accès aux données ainsi qu'une structure de donnée linéaire à accès rapide. Ensuite, pour manipuler ces fonctions nous définissons une algèbre classique (addition, soustraction...) ainsi que les méthodes liant ces fonctions. Par exemple, nous montrerons, comment obtenir la réponse d'une surface à une énergie incidente suivant un angle solide donné en fonction de la BRDF, puis comment associer ces réponses pour évaluer la radiance.

Nous présentons dans ce document l'application de ces modèles au transport de la radiance pour le calcul de l'illumination globale d'une scène virtuelle. Nous montrons comment la visualisation peut se faire de manière interactive tout en tenant compte des réflexions du diffus au "presque spéculaire pur". Le spéculaire pur étant réservé à une deuxième passe en lancer de rayons réduit.

Enfin nous abordons, en vue de développements futurs, l'adaptation à ce modèle des méthodes d'optimisation de la radiosité classique (hiérarchisation, maillage de discontinuité...) et l'extension de la radiance sur surface non planes.

1.14 Base d'ondelettes sphériques et Compression

Discrétisation de la sphère unitaire

4.1.1.1 Définition

Les fonctions que nous voulons modéliser sont définies sur une sphère, nous allons donc discrétiser la sphère unitaire de façon à ce que chaque élément de surface représente une position, un angle solide. Peter Schröder [Sch95] propose une discrétisation non paramétrique de la sphère sur la base d'un octaèdre dont on subdivise les faces récursivement.

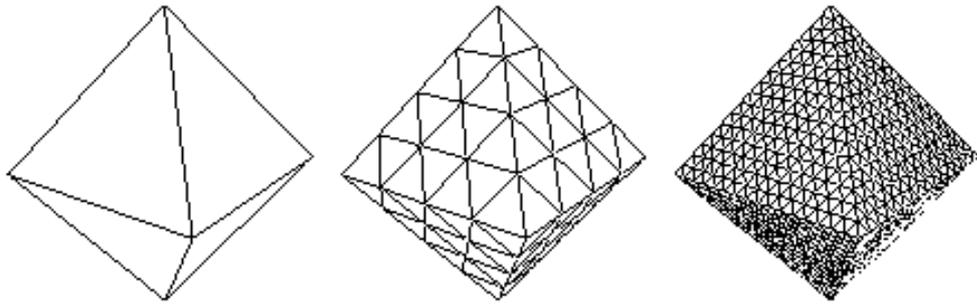


Figure 19 : Subdivision récursive d'un octaèdre

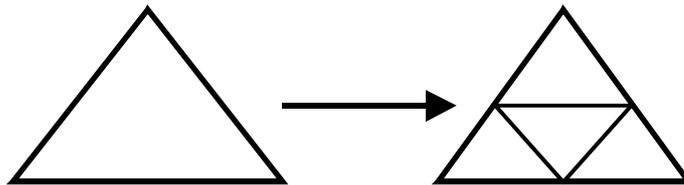


Figure 20 : Subdivision d'un triangle

La subdivision part des faces d'origine qui sont des triangles équilatéraux, pour obtenir quarts fils eux mêmes équilatéraux. Les faces ainsi obtenues peuvent donc être elles même subdivisées récursivement jusqu'à obtenir le maillage voulu.

Cette méthode présente un certain nombre d'avantages dans notre cas :

- Les surfaces sont toutes égales de forme et d'aire à un niveau donné .
- Elles sont assimilables, projetées sur la sphère, à un **angle solide élémentaire** conique.
- Elles sont réparties uniformément sur l'octaèdre.
- La subdivision d'un triangle père en quatre fils se fait dans la surface du père (ce qui n'est pas le cas pour la triangulation de Delaunay)
- L'octaèdre présente, entre autre, une discontinuité sur le plan xy comme peut en présenter une réflectance (réfléchi et réfractée).
- Une fois projeté sur la sphère on obtient un maillage indépendant de la paramétrisation de la sphère (une paramétrisation polaire donnant un échantillonnage irrégulier).

Ce type de maillage est dit multi-résolution : un triangle fils a une résolution 4 fois plus fine que son père. Une fois projeté sur la sphère ce maillage constitue une discrétisation **presque** régulière de la sphère tant pour la surface que pour les directions. Presque régulière, car lors de la projection le maillage subit une déformation due à la courbure de la sphère.

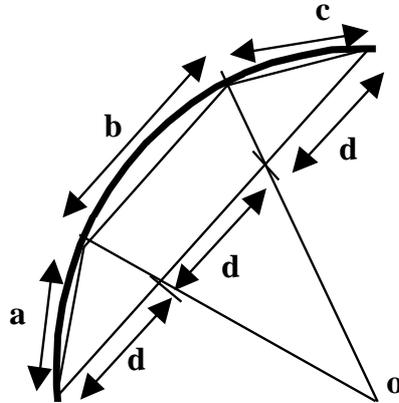


Figure 21 : Projection d'une arête subdivisée de l'octaèdre

On note que $a=c$ mais que b est plus grand que a !

Mathieu Robart [Rob99] propose de projeter les triangles sur la sphère après chaque subdivision pour diminuer ces déformations. C'est cette méthode que nous utiliserons. L'impact des déformations peut encore être diminué si l'on part, par exemple, d'un dodécaèdre au lieu de l'octaèdre.

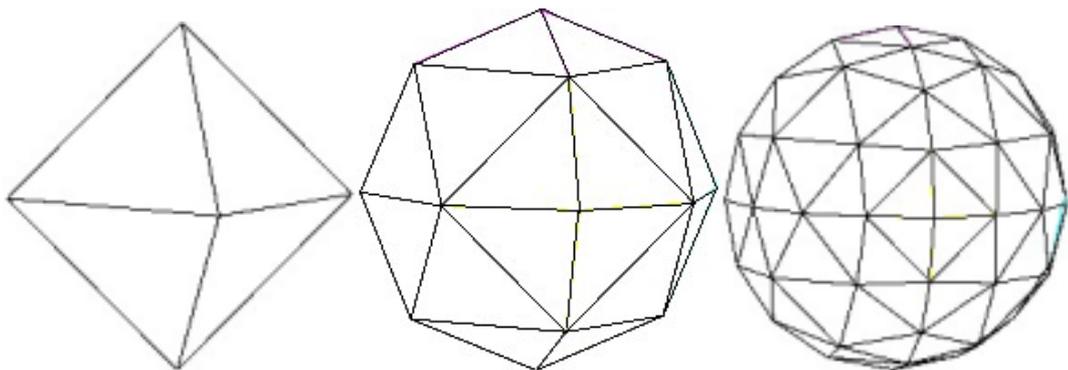


Figure 22 : Subdivision/projection d'un octaèdre

4.1.1.2 Implémentation

Nous avons voulu développer une discrétisation de la sphère adaptative, c'est à dire que l'on puisse subdiviser plus dans une direction que dans une autre si le besoin s'en fait sentir (par exemple pour augmenter la finesse d'échantillonnage sur un pic spéculaire) ou passer à une base dodécaédrique. On veut aussi pouvoir accéder facilement à toutes les directions discrètes (triangles) quelque soit la résolution ainsi qu'aux pères, voisins et fils. Le problème principal étant l'ordonnancement des éléments.

Nous avons opté pour une paramétrisation vectorielle de la sphère, bien plus régulière dans notre cas. Chaque triangle est orienté et numéroté pour un repérage unique de chaque direction.

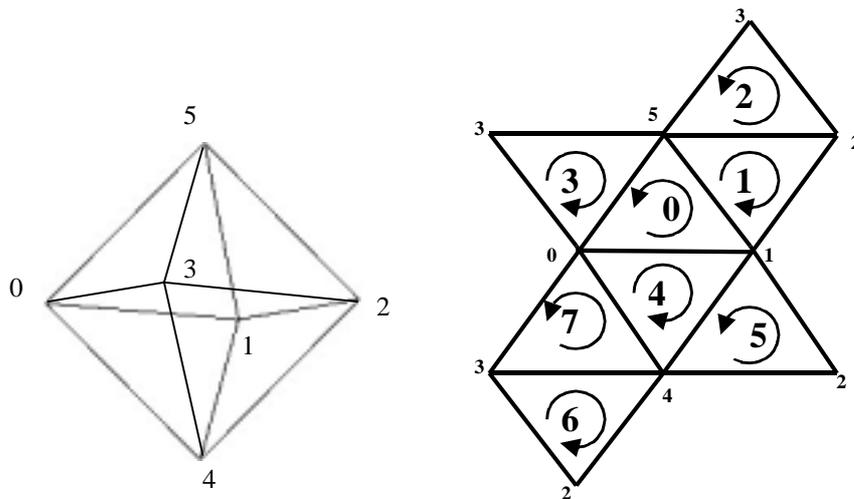


Figure 23 : numérotation des sommets ,des faces et orientation de l'octaèdre

Tous les voisins d'un triangle sont orientés en sens inverse à ce triangle. De plus, les sommets de chaque triangle sont numérotés suivant l'orientation de ce triangle de façon à faire coïncider ces numéros avec ceux des voisins :

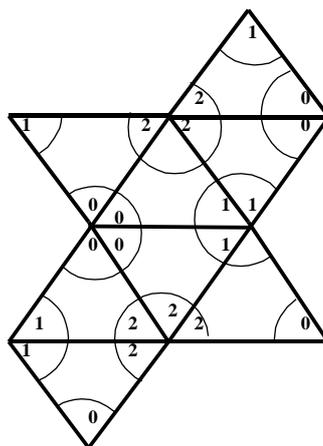


Figure 24 : numérotation des sommets des triangles

Cette arrangement permet une subdivision récursive directe pour passer à la résolution supérieure tout en conservant les propriétés que l'on vient de définir.

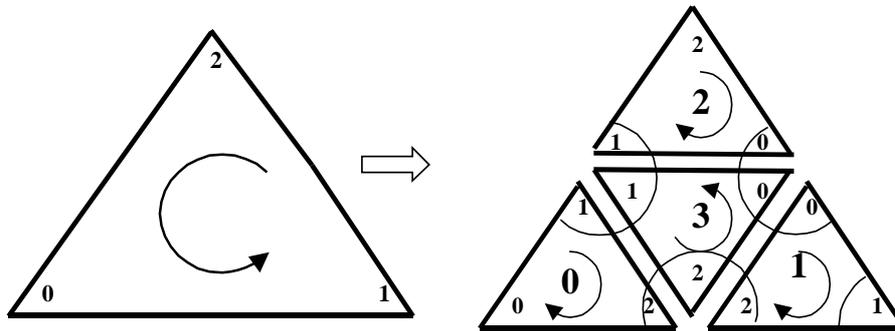


Figure 25 : numérotation des fils et des sommets des fils

- Un fils n ($0 \leq n \leq 2$) a donc le sommet n en commun avec son père, ce sommet est lui même numéroté n pour le fils. Il est orienté dans le sens inverse de son père.
- Le fils 3 ne partage pas de sommet avec son père, il est orienté dans le sens du père.

Toujours pour conserver les mêmes propriétés les voisins (s'ils existent) sont numérotés de la façon suivante :

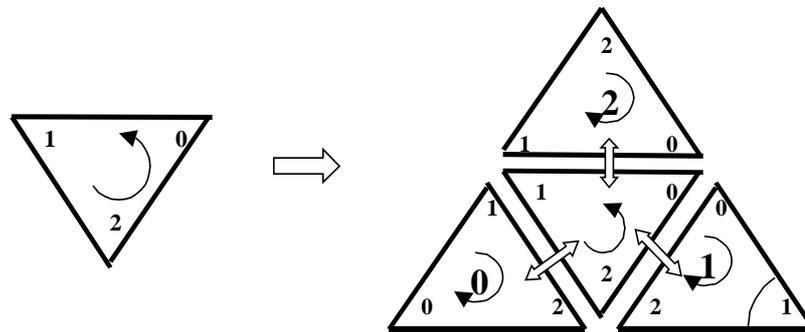


Figure 26 : numérotation des voisins

Un voisin est numéroté 0 si il a en commun les sommets 1 et 2 avec le triangle, 1 s'il a en commun les sommets 2 et 0 et 2 dans le dernier cas (0 et 1).

Pour finir nous avons défini un opérateur d'accès à la base, il prend un vecteur V (direction) et un niveau de résolution et il retourne le numéro du triangle pointé à cette résolution. Pour savoir si V pointe un triangle T on regarde si V est "au dessus" de chacun des 3 plans P_n définis par le centre et deux sommets de T . C'est à dire si le produit scalaire de V avec la normale (orienté vers l'intérieur du triangle T) de chacun des P_n est positif. Si c'est le cas on applique le même algorithme récursivement aux fils jusqu'à la résolution souhaitée.

Code C++ de la subdivision :

```

void
Triangle::Subdivise()
{
//si non subdivisé
  if (!_sub)
  {
// sommets des fils
    Vecteur3D *sfils[3];
    int i;
    _sub=1;
    for (i=0;i<3;i++) sfils[i] = new Vecteur3D;
// création ou sélection des sommets des fils
    for (i=0;i<3;i++)
      *sfils[i] =((_voisin[i])&&(_voisin[i]->Subdivised()))?
        *(_voisin[i]->GetFils(3)->GetSommet(i))
        : ((*_sommet[(i+1)%3])+*_sommet[(i+2)%3]).Norme();
//création des fils:
    //paramètres pour le constructeur de triangles:
    // (somet1, sommet2, sommet3, père, orientation, no du fils)
    _fils[3] = new Triangle(sfils[0],sfils[1],sfils[2],this,_orient,3);
    _fils[0] = new Triangle(_sommet[0],sfils[1],sfils[2],this,-_orient,0);
    _fils[1] = new Triangle(sfils[0],_sommet[1],sfils[2],this,-_orient,1);
    _fils[2] = new Triangle(sfils[0],sfils[1],_sommet[2],this,-_orient,2);
//Liaison avec les voisins s'il y en a.
    for(i=0;i<3;i++)
    {
      if((_voisin[i])&&(_voisin[i]->Subdivised()))
      {
        _voisin[i]->GetFils((i+1)%3)->SetVoisin((i+2)%3,_fils[(i+1)%3]);
        _voisin[i]->GetFils((i+2)%3)->SetVoisin((i+1)%3,_fils[(i+2)%3]);
        _fils[(i+1)%3]->SetVoisin((i+2)%3,_voisin[i]->GetFils((i+1)%3));
        _fils[(i+2)%3]->SetVoisin((i+1)%3,_voisin[i]->GetFils((i+2)%3));
      }
      _fils[i]->SetVoisin(i,_fils[3]);
      _fils[3]->SetVoisin(i,_fils[i]);
    }
    for(i=0;i<4;i++)
      _fils[i]->SetNormales();
  }
}

```

A ce niveau nous pouvons déjà représenter une fonction défini sur une sphère. Par exemple si l'on effectue une subdivision au quatrième niveau on peut mémoriser sur chaque triangle de ce niveau la réflectance dans la direction du centre des triangles pour un pas d'échantillonnage d'environ 5°. Mais cela représente une quantité d'information considérable pour un grand nombre de réflectances (une BRDF par exemple).

C'est pourquoi on va chercher à représenter les données sous forme compressée. Nous allons profiter de la forme multi-résolution de notre maillage pour implémenter une compression par ondelettes selon la méthode du lifting scheme introduite par Schröder.

Lifting scheme sur une base sphérique

4.1.1.3 Définition

Les ondelettes permettent de définir des bases de fonctions qui représentent une fonction donnée par une suite de coefficients à divers niveaux de détails [A1]. Les ondelettes classiques se basent sur la translation et la dilatation d'une fonction mère pour définir une base orthogonale multi-résolution. Alors que les ondelettes de seconde génération ne cherchent qu'à satisfaire des propriétés précises dont la localisation et l'aspect multi-résolution. Le lifting scheme est une méthode permettant de construire des ondelettes de seconde génération pour des fonctions définies sur une surface, la sphère dans notre cas.

Considérons l'espace fonctionnel $L_2 = L_2(S^2, d\omega)$ représentant toutes les fonctions d'énergie définies sur la sphère S^2 . on peut alors définir une analyse multi-résolution comme une séquence de sous-espaces fermés $V_j \subset L_2$ avec $j \geq 0$ tel que :

1. $V_j \subset V_{j+1}$ plus l'indice est haut, plus l'espace est fin
2. $\cup_{j \geq 0} V_j$ est dense sur L_2
3. pour chaque sous-espace V_j il existe N_j fonction d'échelle $\varphi_{j,k}$ avec $k \in K(j)$ qui forment une base de ce sous espace. (nous considérons ici les bases biorthogonales)

$K(j)$ représente un ensemble d'indices, avec $K(j) \subset K(j+1)$, c'est à dire que $N_j \leq N_{j+1}$.

On remarque qu'à la différence de l'analyse multi-résolution classique, les fonctions d'échelle n'ont pas besoin d'être la translation et/ou la dilatation d'une fonction mère. Par contre, la propriété 1, implique qu'une fonction d'échelle d'un niveau j soit une combinaison linéaire des fonctions d'échelle au niveau $j+1$:

$$\varphi_{j,k} = \sum_{l \in K(j+1)} h_{j,k,l} \varphi_{j+1,l}$$

Équation 21 : Fonction d'échelle

Où les coefficients h sont définis pour $j \geq 0$, $k \in K(j)$ et $l \in K(j+1)$.

On peut alors définir une base d'ondelettes sphériques composée de fonctions $\psi_{j,m}$ qui vont coder la différence qui existe entre deux niveaux successifs de représentation ($m \in M(j)$ un autre ensemble d'indices tel que $M(j) \subset K(j+1)$) . Elles forment donc une base pour les espaces W_j où $V_j \oplus W_j = V_{j+1}$.

$$\psi_{j,m} = \sum_{l \in K(j)} g_{j,k,l} \varphi_{j+1,l}$$

Équation 22 : ondelettes

Nous pouvons donc, à présent, écrire une fonction d'échelle d'indice l du niveau j+1 comme une combinaison linéaire des fonctions d'échelle d'indice k du niveau j et des ondelettes d'indice m aussi du niveau j.

$$\varphi_{j+1,l} = \sum_{k \in K(j)} h_{j,k,l} \varphi_{j,k} + \sum_{m \in M(j)} g_{j,m,l} \psi_{j,m}$$

Équation 23 : Fonction d'échelle

Considérons maintenant l'ensemble des coefficients des fonctions d'échelle pour une fonction f $\{\lambda_{n,k} = \langle f, \varphi_{j,k} \rangle | k \in K(n)\}$ où $n \leq j$. Alors la transformation rapide par ondelettes calcule récursivement $\{\gamma_{j,m} | 0 \leq j \leq n, m \in M(j)\}$ et $\{\lambda_{0,k} | k \in K(0)\}$, c'est à dire les approximation les plus grossières de la fonction. Une étape de la transformée rapide consiste à calculer les coefficients d'un niveau plus grossier j à partir des coefficients d'un niveau plus fin j+1, c'est la synthèse :

$$\lambda_{j,k} = \sum_{l \in K(j+1)} h_{j,k,l} \lambda_{j+1,l} \text{ et } \gamma_{j,m} = \sum_{l \in K(j+1)} g_{j,m,l} \lambda_{j+1,l}$$

Équation 24 : Itération de la transformée en ondelettes

La reconstruction du signal d'origine qui se fait alors à partir des coefficients des niveaux plus grossiers s'appelle l'analyse :

$$\lambda_{j+1,l} = \sum_{k \in K(j)} \bar{h}_{j,k,l} \lambda_{j,k} + \sum_{m \in M(j)} \bar{g}_{j,m,l} \gamma_{j,m}$$

Équation 25 : Itération de la reconstruction du signal

Une fois que le signal a subi une transformée en ondelettes sphérique on peut facilement effectuer une compression en éliminant les coefficients d'ondelette les plus faibles (les détails), exactement comme pour une transformée classique.

4.1.1.4 Adaptation à notre problématique

Nous proposons deux implémentations simples et rapides des ondelettes sur la sphère telle que nous l'avons défini plus haut.

La première sera utilisée pour la compression de fonctions retournant une énergie sous un certain **angle solide** tel que la fonction de radiance en un point ou la réponse d'un matériau à une énergie incidente. Sous cette forme un triangle père "contiendra" la somme des énergies de ses fils.

La deuxième sera utilisée pour la compression de fonctions retournant un ratio d'énergie sous un certain **angle** tel une réflectance ou une BRDF. Un triangle père contient alors la moyenne de ses fils

La première étape consiste donc à échantillonner le signal à la résolution souhaitée puis à effectuer la première partie de la synthèse : le calcul des coefficients pour les fonctions d'échelle des niveaux plus grossiers

$$1. \lambda_{j,k} = \lambda_{j+1,l} \quad l \in \text{fils}_{j,k}$$

$$2. \lambda_{j,k} = \frac{1}{4} \lambda_{j+1,l} \quad l \in \text{fils}_{j,k}$$

Puis nous modifions légèrement le processus du lifting scheme en effectuant la compression lors de la deuxième partie de la synthèse. Si un coefficient d'ondelette n'est pas assez faible pour être compressé laissons la valeur d'origine (ondelettes faibles). Nous avons donc défini un interpolant permettant de générer les coefficients d'ondelettes

$$1. I_{j+1,l} = \frac{1}{4} \lambda_{j,k} \quad \text{Si } l \text{ est le fils 3 (fils du milieu) de } k$$

$$I_{j+1,l} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \lambda_{j,k} + \frac{1}{4} \lambda_{j,u} + \frac{1}{4} \lambda_{j,v} \right) \quad \text{si } l \text{ est un fils } \neq 3 \text{ de } k \text{ et } u \text{ et } v \text{ les voisins communs de } l \text{ et } k.$$

$$2. I_{j+1,l} = \lambda_{j,k} \quad \text{Si } l \text{ est le fils 3 (fils du milieu) de } k$$

$$I_{j+1,l} = \left(\frac{1}{2} \lambda_{j,k} + \frac{1}{4} \lambda_{j,u} + \frac{1}{4} \lambda_{j,v} \right) \quad \text{si } l \text{ est un fils } \neq 3 \text{ de } k \text{ et } u \text{ et } v \text{ les voisins communs de } l \text{ et } k.$$

Si la différence entre interpolant et le coefficient correspondant est proche de zéro on élimine ce coefficient de la structure de donnée. Si non on ne fait rien. En d'autres termes, l'interpolant calcule, à partir des pères, une approximation d'un coefficient. Si cette approximation est bonne ce coefficient n'est plus utile car on peut le reconstruire simplement en ré-applicant l'interpolant. Pour des raisons de facilité nous effectuons les opérations avec le carré de l'interpolant (simple inégalité)

On remarque qu'un effet de bord peut se produire. En effet si on compresse un coefficient alors que celui-ci a servi de base à la compression d'un autre de résolution plus faible, l'erreur va alors être retransmise à la reconstitution. Une solution consiste à inverser le sens de la récursion en compressant d'abord les niveaux les plus grossiers.

Compression

Si l'on stocke réellement les valeurs de nos fonctions sur la sphère en affectant à chaque triangle un champ "donnée" par exemple, alors la compression n'a pas d'effet car une valeur, éventuellement nulle, est conservée. De plus il faut prévoir une sphère par fonction et tel que nous l'avons définie, la base sphérique n'a pas une taille mémoire négligeable face aux données (surtout compressée).

Nous avons donc pris le parti de séparer les données de la base et de les stocker non pas dans une table de hachage qui nous semble trop lente, mais dans un tableau linéaire discontinu et creux inspiré du découpage en bande des arbres creux.

Nous proposons de mémoriser une donnée à un indice du tableau correspondant au numéro du triangle (sur la sphère) auquel elle se rattache. Mais, après la compression, de grandes zones du tableau seront éliminées. Nous découpons donc notre tableau en bandes, ce qui permet de ne garder que l'information utile. Chaque bande est composée d'un tableau d'indices (tableau de bit : 1=> une donnée est présente à cet indice) et d'un tableau de donnée de taille inférieure ou égale au tableau d'indice. Chaque bande est numérotée et doublement-chaînée à une bande précédente et à une bande suivante. Si entre deux bandes une bande est manquante elle est considérée comme vide.

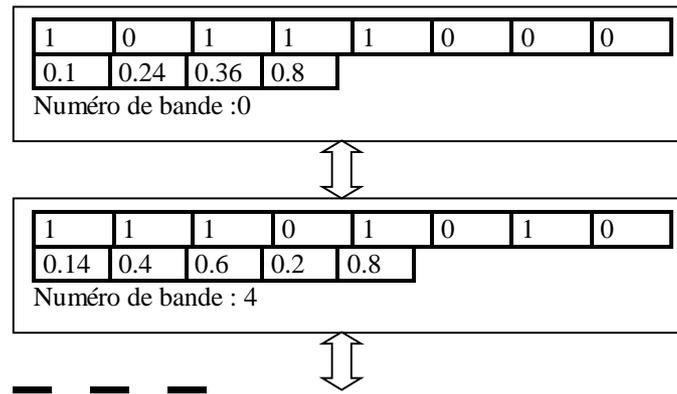


Figure 27 : chaînage des bandes d'un tableau creux

Nous n'utilisons finalement plus qu'une seule sphère comme base d'accès aux données pour toutes les fonctions. La mémoire utilisée par la structure des tableaux creux est cette fois négligeable face à la quantité de données manipulées.

4.1.1.5 Résultats

Voici les résultats que nous obtenons pour la compression pour des fonctions du type réflectance ou réponse.

Plutôt diffuse :

Résolution	Nb échantillons	Nb coefs	temps	% compressé
1	20	4	0.0001	80
2	84	7	0.008	92
3	340	9	0.01	97
4	1364	9	0.07	99

Plutôt spéculaire :

Résolution	Nb échantillons	Nb coefs	temps	% compressé
1	20	11	0.0025	52
2	84	19	0.0025	77
3	340	70	0.0125	79
4	1364	190	0.5	86

Pour la compression d'une BRDF nous obtenons ceci :
Pour des réflectances de résolution 3 fixée
Plutôt diffuse :

Résolution	Nb échantillons	Nb coefs	temps	% compressé
1	20	20	0.26	0
2	84	76	1.16	9
3	340	204	5.06	40
4	1364	540	20.82	60

Plutôt spéculaire :

Résolution	Nb échantillons	Nb coefs	temps	% compressé
1	20	20	0.31	0
2	84	81	1.33	3
3	340	278	5.64	18
4	1364	1348	21.84	11

4.1.1.6 Discussion sur la BRDF

Tel que nous l'avons développé, notre modèle peut représenter tous types de BRDF (isotrope, anisotrope, du spéculaire pure au diffus ou même semi-transparente) soit mesurées soit générée par un modèle du type Cook Torrance ou un goniophotomètre virtuel [Rob99]. Mais on peut pour simplifier se limiter aux BRDF isotrope (les plus courantes) ce qui permet de ne plus échantillonner les réflectances sur l'azimut. Lors de la reconstitution il faudra alors effectuer une rotation de la réflectance suivant l'azimut d'incidence.

Notre interpolant est générique (comme nous l'expliquons dans le chapitre suivant), dans le cas de la BRDF il calcule donc, pour une incidence donnée, une approximation d'une réflectance dont le pic spéculaire est évasé par l'opération de moyenne et l'utilisation des pôles de définition plus grossiers. Cet interpolant est donc très "mauvais" pour les BRDF présentant de forts pics spéculaires et très "bon" pour des BRDF diffuses. Une solution consisterait à corrélérer les paramètres d'incidence et de réflexion sur une même base comme le proposent Paul Lalonde et Alain Fournier [Lal97] au lieu de considérer, comme nous le faisons, qu'une BRDF est une fonction sphérique qui reçoit un vecteur d'incidence et retourne une réflectance complète (sur tout le domaine d'émission). Une autre solution plus souple consiste à développer un interpolant donnant une meilleure prédiction en effectuant une rotation sur un voisin pour faire coïncider les pics spéculaires, par exemple.

1.15 Définition d'une algèbre et de la structure des fonctions

Algèbre

A partir de la structure de donnée que nous avons définie plus haut il est facile de définir une algèbre classique. En effet nous avons besoin des opérations suivantes :

- L'addition et la soustraction entre deux fonctions du même type pour par exemple pouvoir sommer des réponses pour former une réflectance.
- La multiplication et division par un réel ou un entier pour, par exemple générer une réponse à partir d'une réflectance et d'une énergie

Ces opérations sont aussi mises à contribution lors de la transformée en ondelettes.

L'addition et la soustraction entre deux fonctions se fait simplement en appliquant l'opération sur toutes les paires d'échantillons de même indice. De la même façon la multiplication ou la division par un réel/entier est appliquée à chaque échantillon de la fonction.

Nous voyons donc que ces opérateurs peuvent être génériques à toutes fonctions. De plus elles ne font pas intervenir la répartition spatiale des données si on peut donc les appliquer directement sur la structure en tableaux creux.

La multiplication ou la division par un réel/entier ne représente qu'une opération de mise à l'échelle qui n'a pas d'influence sur la proportionnalité relative des données et donc peut s'effectuer directement sur un tableau compressé. Par contre l'addition et la soustraction de deux fonctions nécessite la reconstitution du signal localement lorsque, à un indice i , la donnée est compressée pour une opérande (fonction) alors qu'elle ne l'est pas pour l'autre. Il faut donc rendre **cohérente** l'information contenue dans les tableaux avant d'effectuer les opérations d'addition et de soustraction. Après l'opération les données reconstituées des opérandes sont à nouveau éliminées pour conserver la compression, le résultat peut, lui, être compressé de manière classique. Il faut noter que lors des opérations d'addition ou de soustraction sur des tableaux compressés nous sommes aussi les erreurs. Toutefois l'erreur peut être considérée sur un grand nombre d'opérations comme une variable aléatoire d'espérance nulle. Nous pouvons donc la négliger.

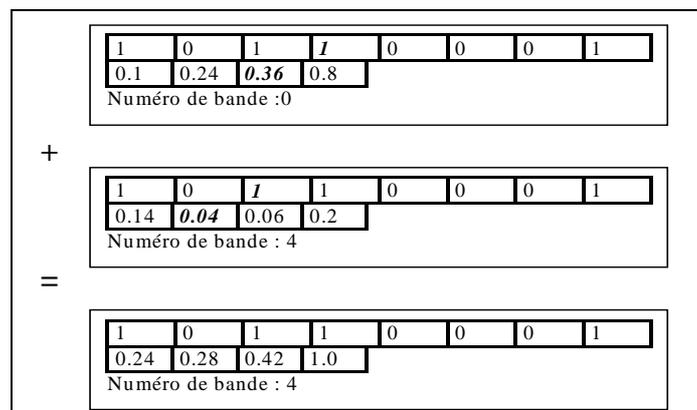


Figure 28 : addition de deux bandes

Les données en gras/italique sont des données reconstituées

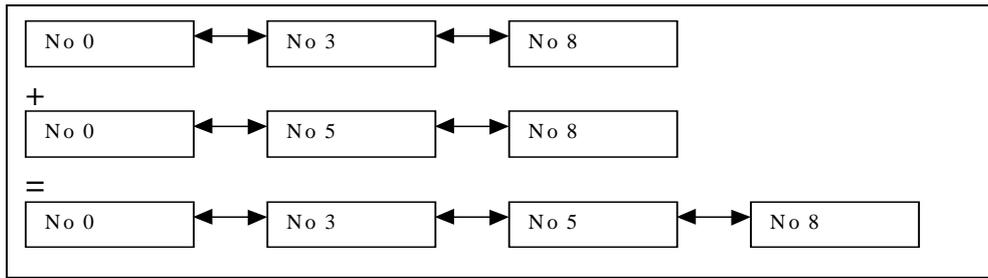


Figure 29 : Addition de deux tableaux creux compressés

Construction de fonctions

Une fonction donnée (BRDF, réflectance ...) est donc l'instanciation d'une fonction générique elle-même dérivée d'un tableau creux générique, et définie sur une sphère.

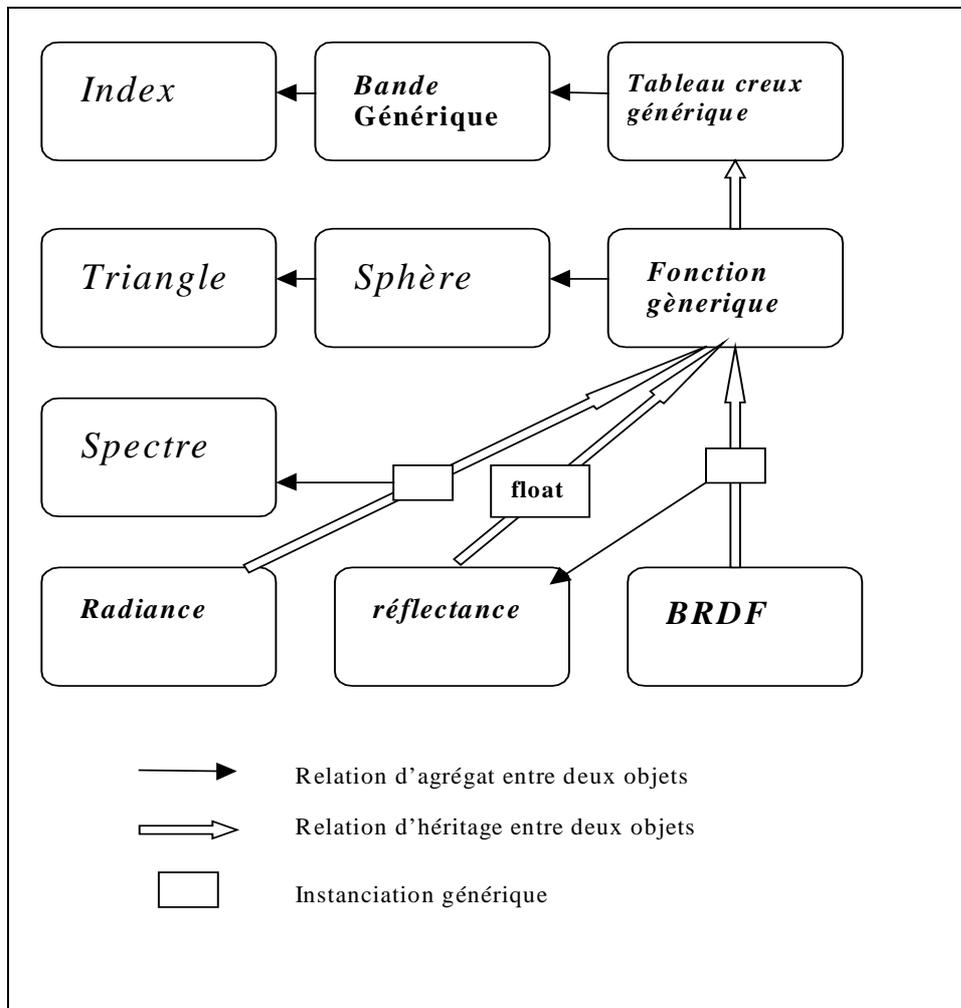


Figure 30 : Diagramme des classes

1.16 Simulation d'éclairage

Modélisation discrète

Une fois définie le modèle des fonctions dont nous avons besoin nous désirons les utiliser pour la simulation de l'éclairage d'une scène virtuelle. Nous allons donc ici développer un modèle mathématique, sur la base de l'équation générale de rendu, prenant en compte nos hypothèses : la discrétisation de l'espace des directions et l'aspect multi-résolution de nos fonctions. Mais, avant tout, nous allons redéfinir quelques grandeurs radiométriques pour les adapter à la discrétisation.

4.1.1.7 Radiance discrète

Définition : la radiance **discrète** L est la quantité d'énergie provenant d'un patch selon une direction donnée par un angle solide , par unité de temps.

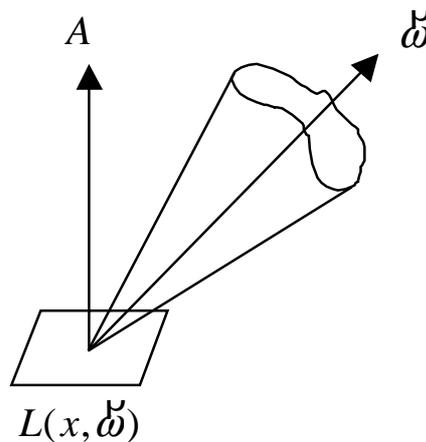


Figure 31 : radiance discrète

La radiance discrète est donc égale à la radiance intégrée sur la surface du patch et sur l'angle solide d'émission.

Nous verrons par la suite comment donner une approximation de cette intégrale.

Nous nommons Réponse la radiance discrète générée par "l'impact" d'un seul rayon incident sur un patch.

4.1.1.8 Réflectance discrète

Définition : la réflectance directionnelle réfléchie discrète $\rho(p, \omega_r)$ correspond au ratio de lumière diffusée dans un angle solide de l' hémisphère de réflexion pour un angle solide d'incidence fixée sur le patch p .

$$\rho_d(p, \omega_r) = \rho_{bd}(p, \omega_i, \omega_r) \cdot \cos \theta_i$$

Équation 26 : réflectance discrète

i est fixé, ω_i et ω_r sont des angles solides quelconques.

ρ_d est alors une fonction sphérique égale à l'intégrale sur ω_i de la brdf ρ_{bd} divisé par ω_i (moyenne). $\rho_d(p, \omega_r)$ représente alors un ratio égale à l'intégrale de la réflectance que l'on vient de générer divisé par ω_i .

4.1.1.9 Modèle mathématique

Voici donc l'équation générale de rendu discrète que nous proposons sur la base des développements précédents.

$$L(p_k, \omega_r) = [L_e(p_k, \omega_r) + L_r(p_k, \omega_r)] \cos \theta$$

$$L_e(p_k, \omega_r) = \sum_{\omega_a \in \omega_r(m)} L_e(p_k, \omega_a)$$

$$L_r(p_k, \omega_r) = \sum_{\omega_a \in \omega_r(m)} \left(\sum_{l \neq k} \left[\sum_{\omega_b \in \omega_l(n)} \frac{1}{\text{card}(\omega_l(n))} \rho_{bd}(p_k, \omega_b) \right] \cdot L(p_l, \omega_r) \right) (\omega_a)$$

Équation 27 : équation générale de rendu discrétisée par ondelettes

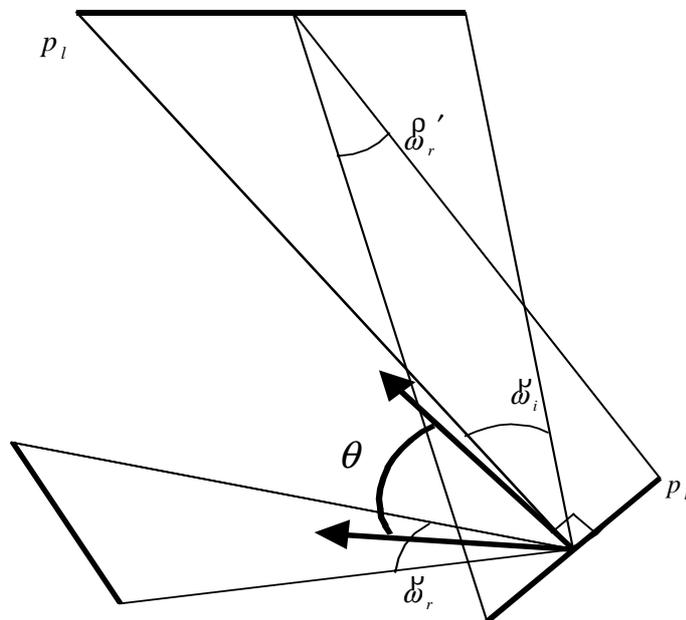
Où

- $L(p_k, \omega_r)$ la radiance discrète du patch P_k dans la direction ω_r .
- $L_e(p_k, \omega_r)$ la radiance discrète propre de P_k dans la direction ω_r .
- $L_r(p_k, \omega_r)$ la radiance discrète réfléchie par P_k dans la direction ω_r et provenant de l'ensemble des autres patches.
- ω_r est un angle solide réfléchi de résolution inférieur ou égale à la résolution m fixant une limite dans la précision des transferts
- ω_i est un angle solide incident au patch P_k , de résolution inférieur ou égale à la résolution n la plus fine de la BRDF ρ_{bd} . Il englobe exactement le patch P_l
- $\rho_{bd}(p_k, \omega_c)$ retourne une réflectance (directionnelle)

- ω'_r est un angle solide réfléchi par le patch P_l englobant exactement le patch P_k
- $\omega_r(m)$ est l'ensemble des **angles solides élémentaires** ω_a de la base d'ondelette(triangles) au niveau \mathbf{m} contenus dans ω'_r
- $\omega_i(n)$ est l'ensemble des **angles solides élémentaires** ω_b de la base d'ondelette(triangles) au niveau \mathbf{n} contenus dans ω'_i
- $\text{Card } \omega'_i(n)$ est le cardinal de $\omega'_i(n)$
- θ est l'angle à la normale du patch P_k dans la direction ω'_r

4.1.1.10 Explication :

Le terme $\frac{1}{\omega_b \in \omega_i(n) \text{ card}(\omega_i(n))} \rho_{bd}(p_k, \omega'_b)$ représente une réflectance "grossière" du patch P_k , générée à partir de la DRDF et d'un grand angle solide d'incidence ω'_i . La formulation est cohérente car la BRDF donne un ratio d'énergie. Si l'on multiplie ce terme par l'énergie $L(p_l, \omega'_r)$ provenant du patch P_l dans la direction ω'_i on obtient une réponse directionnelle. En faisant ensuite la somme de ces réponses pour tous les patches P_l $l \neq k$ on génère la radiance directionnelle du patch P_k . Si l'on intègre cette fonction sur un angle solide d'observation (somme des delta angles solide de la base d'ondelette) on trouve l'énergie émise par le patch P_k dans la direction d'observation. Finalement on multiplie cette énergie par le $\cos \theta$ pour tenir compte de l'orientation de P_k .



géométrie pour la radiance discrète

Grâce à cette formulation nous pouvons dorénavant calculer la radiance directionnelle discrète pour chaque patch de la scène. Nous constatons que nous n'utilisons plus de Facteur de forme comme pour la Radiosité classique. En effet le facteur de forme est un paramètre purement géométrique représentant une atténuation de l'énergie transportée en fonction de l'orientation mutuelle des patches, leur aire et de la distance parcourue. Ici l'aspect géométrique est directement pris en compte par le modèle : la radiance directionnelle discrète tel que nous l'avons définie retourne, pour un patch et un angle solide donné, l'énergie **totale** que ce patch émet dans **cette direction**. Elle est donc fonction de **l'aire du patch émetteur** et de son **orientation**. Si, de plus, l'angle solide d'émission recouvre **exactement** un patch récepteur l'énergie émise dépend alors aussi de **l'aire du récepteur** de son orientation et de la **distance mutuelle entre les deux patches....CQFD**.

4.1.1.11 Erreurs et approximations

La discrétisation crée un certain nombre d'erreurs :

- La radiance est considérée constante, elle est intégrée sur la surface du patch. Donc schématiquement, pour un point émetteur et une réflexion spéculaire pure cela donne ceci :

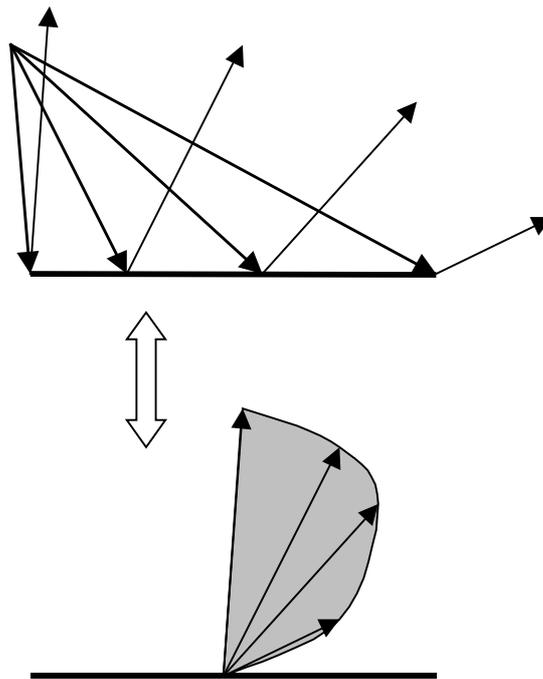


Figure 32 : intégration de la radiance discrète

Cette approximation induit une perte totale de la variation du signal sur la surface du patch. On en déduit donc qu'il faut adapter la taille du patch en fonction de la variation (dérivée) de la radiance sur sa surface.

- L'énergie est émise depuis le centre du patch :
Cela induit un aliassage et une répartition de l'énergie non contrôlable suivant une direction donnée

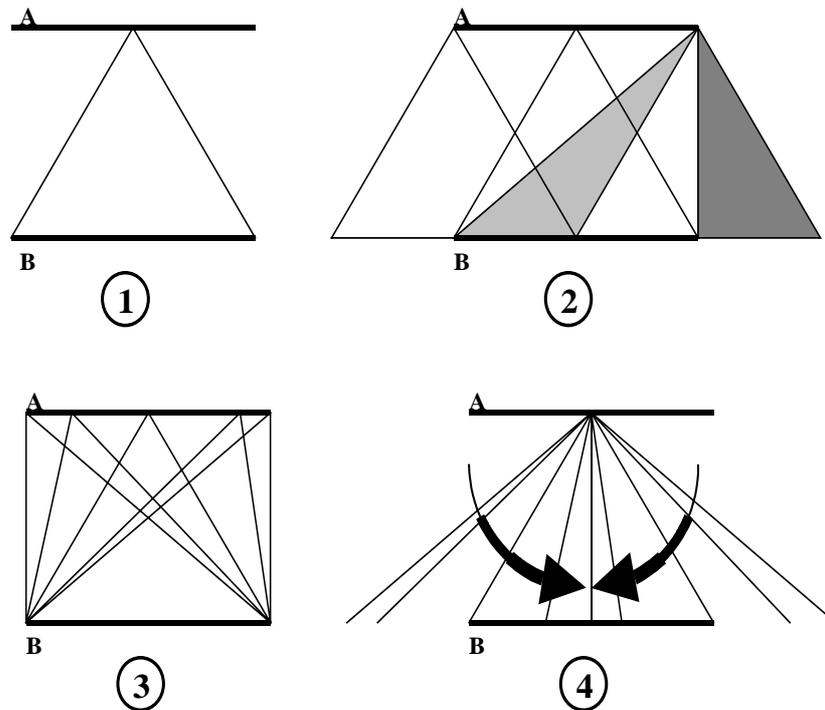


Figure 33 : Erreur dans l'émission de l'énergie

Cette planche compare les transferts d'énergie du patch A vers le patch B dans les cas discrets (1&2) et réelle (3&4).

1. Emission discrète de A vers B suivant le modèle mathématique
2. "dés-intégration" constante sur le patch
3. Emission réelle de A vers B
4. Intégration du cas réel au centre du patch

Nous constatons que deux erreurs supplémentaires sont commises dans le cas discret lors d'un transfert d'énergie entre deux patches.

Premièrement on note, pour le schéma 2, un décalage dans la répartition de l'énergie qui génère un aliassage. La partie gris foncé ne devrait pas être prise en compte alors que la partie gris clair devrait l'être.

Deuxièmement, dans le cas réel on voit que la répartition de l'énergie sur le récepteur est graduelle, pas dans le cas discret.

Pourtant le modèle, bien que erroné, reste valide car il respecte la loi de conservation de l'énergie. En effet nous considérons que le centre du patch émet toute l'énergie du patch, et que chaque récepteur "vient chercher" cette énergie suivant un angle solide qui le contient

exactement, donc l'énergie reçue par l'ensemble des récepteurs est au plus égale à l'énergie émise.

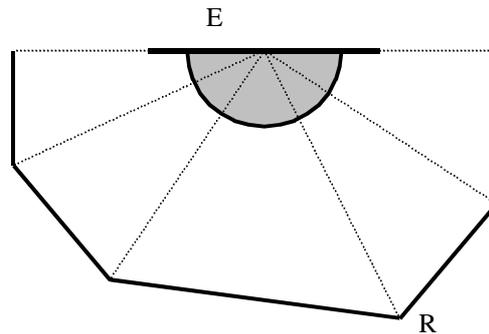


Figure 34 : Conservation de l'énergie

- La réception de l'énergie sur un patch se fait uniformément sur l'angle solide d'incidence, sans tenir compte ni de l'orientation mutuelle des patches ni de la distribution de l'énergie émise dans cet angle solide.
On peut éventuellement améliorer la répartition de la réception d'une énergie incidente en définissant une fonction de distribution empirique dépendant de l'orientation mutuelle des deux patches qui viendrait remplacer le $1/\cos(\theta)$ de notre équation de rendu discrète.
- La réception de l'énergie se fait au centre du patch suivant une direction $\vec{\omega}_i$ que nous avons défini comme étant l'angle solide partant du centre du récepteur couvrant exactement le patch émetteur. Or, comme dans le cas de l'émission, cela génère des erreurs. Pourtant ici nous sommes dans une situation plus souple car cet angle permet de générer une réflectance discrète donc une fonction de distribution. Nous n'avons plus ici la contrainte de conservation de l'énergie, nous pouvons donc déformer la réflectance ou bien prendre un angle solide d'incidence plus large sans affecter les lois de la physique. Cela peut permettre de mieux prendre en compte les propriétés de certains types de matériaux ou de jouer sur la qualité de l'image : "plus sec" avec un angle solide fin, "plus chaud" avec un angle solide large.

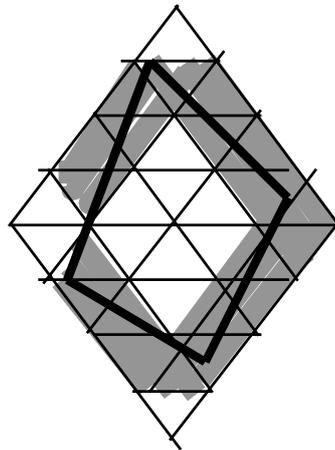
Transport de l'énergie

Pour implémenter notre modèle dans un algorithme d'illumination globale nous devons gérer les interactions lumineuses entre patches munis d'une BRDF et d'une radiance. La BRDF est une des caractéristiques du matériau constituant le patch, elle permettra de générer une réponse à un flux lumineux incident. La somme de ces réponses donne la radiance du patch. Le patch doit à son tour émettre de l'énergie, pour cela, il faut pouvoir sélectionner un angle solide d'émission sur la fonction de radiance.

4.1.1.12 Angle solide discrétisé

La sélection d'un angle solide quelconque passe par la discrétisation de celui-ci, à la surface de la base sphérique, en un ensemble d'angles solides élémentaires géométriquement représentés par des triangles.

Cette discrétisation induit un phénomène d'aliassage du même type que celui qui se produit lors de la numérisation d'une image. En effet l'angle solide ne peut généralement pas être exactement reconstitué à partir d'une combinaison de triangles. Deux solutions sont apportées à ce problème. On peut augmenter la résolution de la base sphérique de façon à diminuer l'erreur. On peut aussi partager les informations des zones frontières entre les angles solides voisins à cette frontière.



aliassage de l'angle solide discretisé

en noir la projection de l'angle solide sur la sphère
en grisé la zone frontière

Dans un souci de conservation de l'énergie, nous ne pouvons pas distribuer l'énergie provenant d'un angle solide élémentaire donné à plusieurs patches. Nous avons donc décidé de ne propager que la moitié de l'énergie sur les zones frontières. Une erreur est tout de même présente aux sommets de la zone frontière puisque le triangle correspondant se partage plusieurs patches mais nous considérons cette erreur négligeable au vue de l'énergie transportée.

4.1.1.13 Transformée d'un angle solide en une combinaison d'angles solides élémentaires

A ce niveau nous voyons que nous pouvons approximer un angle solide quelconque par une combinaison d'angles solides discrets de la base sphérique

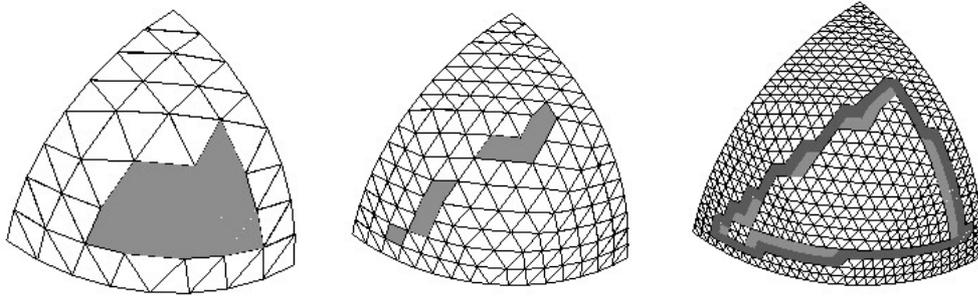


Figure 35 : Combinaison d'angles solides élémentaires

En grisé foncé : angles solides élémentaires frontières

En grisé clair : angles solides élémentaires internes

En blanc les angles solides externes.

On voit que l'on peut utiliser avantageusement l'aspect multi-résolution de la sphère dans ce cas. En effet les angles solides élémentaires internes peuvent être indifféremment de niveau inférieur ou égale à la résolution demandée, car ils représentent de toutes façons la somme ou la moyenne de leurs fils.

Une deuxième remarque importante peut être faite concernant le niveau de résolution aux frontières : Nous avons défini, pour notre base d'ondelettes, un interpolant capable de régénérer une donnée éliminée par la compression, mais par chance cet interpolant peut aussi générer des données à un niveau de résolution plus fin que celui d'une fonction sphérique donnée. La nouvelle donnée ainsi générée est cohérente pour cette fonction, bien que son niveau de résolution ne paramétrise pas la fonction car il n'a jamais été échantillonné.

Donc nous pouvons sans risque développer un algorithme de discrétisation multi-résolution d'un angle solide en angles solides élémentaires à un niveau de résolution élevé **fixé** ou adaptatif à la géométrie. Cet algorithme peut donc ne pas tenir compte de la résolution de la fonction sphérique.

On note bien évidemment que si la résolution est faible l'approximation est très mauvaise, par exemple si l'angle solide d'origine est plus petit que la résolution demandée il sera approximé par un seul triangle à cette résolution

4.1.1.14 Algorithme de discrétisation :

Nous proposons donc un algorithme récursif permettant de détecter les triangles élémentaires, de résolution inférieur ou égale à la résolution demandée, inclus dans un angle solide donné. A la résolution demandée l'algorithme donne les triangles frontières qui pourront ainsi être traités séparément.

Le problème est ici purement géométrique. Nous dénombrons six configurations possibles :

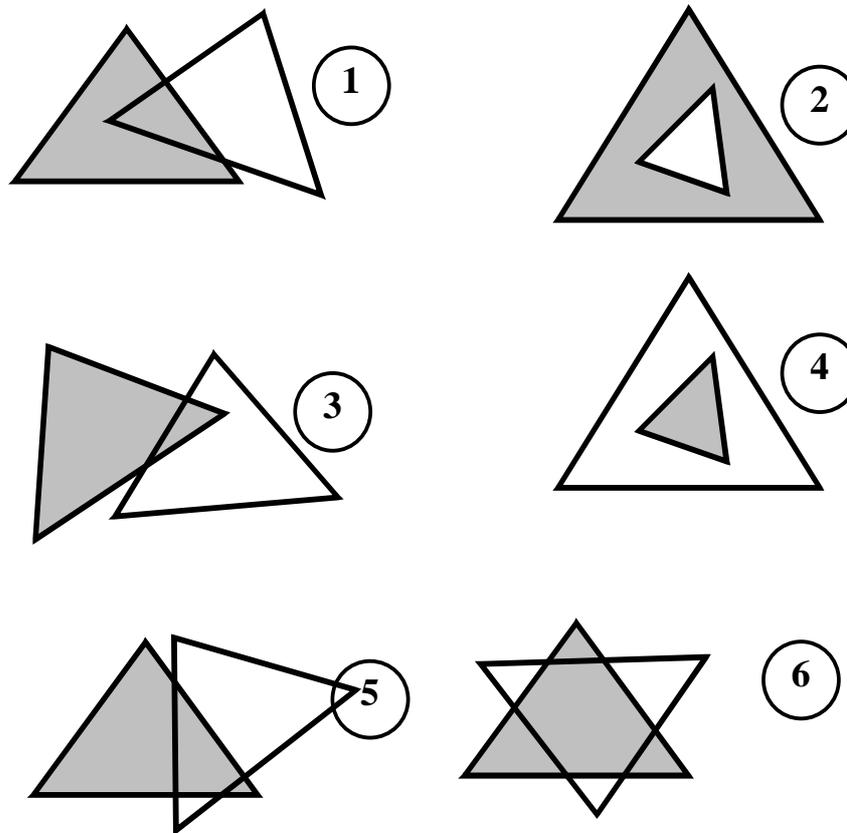


Figure 36 : intersection de deux triangles

En blanc le triangle intersecteur correspondant à un angle solide quelconque.

En grisé le triangle intersecté, c'est un triangle de notre base considéré équilatéral et subdivisible.

1. Pour détecter le premier cas nous utilisons l'opérateur d'accès à la base sphérique défini plus haut qui permet de détecter si un vecteur donné est dans un angle solide élémentaire donné. Nous pouvons utiliser cet opérateur car les sommets des triangles sont définis vectoriellement. Nous regardons donc si un des sommets de l'intersecteur est dans l'intersecté. Si c'est le cas et que la limite de résolution n'est pas atteinte, on subdivise et on applique récursivement l'algorithme sur les fils. Si la limite de résolution est atteinte le triangle intersecté est placé dans la liste des triangles frontière.
2. C'est un cas particulier du 1 : l'intersecteur est dans l'intersecté.
3. Si un ou deux sommets de l'intersecté sont dans l'intersecteur on applique la subdivision/récursion
4. Si tous les sommets de l'intersecté sont dans l'intersecteur, la récursion s'arrête et le triangle intersecté est placé dans la liste des triangles internes.
5. Ce cas n'est pas trivial. Voici sa géométrie :

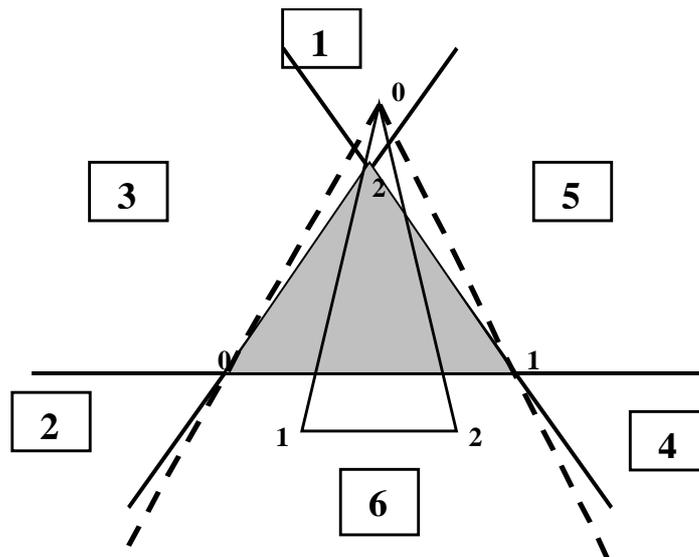


Figure 37 : géométrie d'intersection

Dans ce cas, il y a intersection si pour un sommet A de l'intersecteur se trouvant dans une des régions numérotés de 1 à 6, il y a un sommet de l'intersecté dans la zone symétrique délimitée par les segments $[A,X]$ et $[A,Y]$, X et Y étant les sommet de l'intersecté du coté de cette zone. Dans notre exemple , A est le sommet 0 de l'intersecteur, X le sommet 0 de l'intersecté et Y le sommet 1 de l'intersecté.

Nous remarquons qu'il suffit de s'intéresser à un seul sommet de l'intersecteur pour obtenir la solution. Nous nous placerons donc toujours au sommet 0. La numérotation des zones se fait sur trois bits, chaque bit indiquant si l'on se trouve au dessus ou au dessous des droites (0,1), (1,2), (2,0) définies pas les sommets de l'intersecté. Ainsi il est facile de savoir dans quelle zone se trouve le point 0. Il suffit donc finalement de 3 produits scalaires pour positionner le point 0 et de 2×2 autres pour savoir si un des deux autres sommets est dans la zone opposée. Si c'est le cas, on applique la subdivision /récursion.

6. C'est un cas particulier du 5.

4.1.1.15 Conclusion

Cet algorithme semble efficace d'un point de vue qualité pour le calcul des transferts d'énergie car il permet une précision au delà même de la résolution paramétrique de la fonction (radiance, réflectance...) tout en tenant toujours compte de cette paramétrisation. Mais, la résolution récursive implique une augmentation exponentielle des temps de calcul avec l'augmentation de la résolution. Il pourrait donc être avantageux de poursuivre la résolution , à partir d'un niveau donné, avec un autre algorithme inspiré par exemple de la méthode de l'hémicube de Cohen.

Application des algorithmes de Radiosité à notre modèle de radiance

A partir des modèles que nous venons de développer il devient relativement simple de réaliser une itération de Gauss-Seidel. Il suffit pour un patch P donné de calculer l'énergie directionnelle provenant de chacun des autres patches, de générer pour chacune de ces directions une réponse et de sommer ces réponses pour former la radiance du patch. La discrétisation des angles solides d'incidence et de réflexion se fait alors à la volée.

Nous avons implémenté une version très simpliste de l'itération de Gauss-Seidel dont nous présentons une planche de résultats en annexe. La scène utilisée est constituée de trois plans diffus de couleur blanche pour le sol, rouge pour le mur de droite et jaune pour le mur de gauche. Un miroir (proche du spéculaire pure) est positionné sur chaque murs, l'un vert, l'autre bleu. Enfin une source lumineuse éclaire du centre de la scène vers le coin formé par les deux murs.

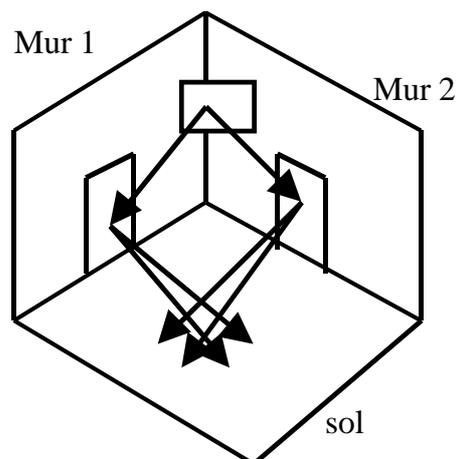


Figure 38 scène expérimentale

On voit très nettement la réflexion de la lumière sur le sol au travers des deux miroirs colorés. De plus on note que l'énergie lumineuse s'est bien propagée à toute la scène comme dans la radiosité classique.

Nous ne présentons pas de tableaux comparatifs sur les temps de calculs car l'algorithme utilisé ici pour la résolution du système est un peu "brutal". Toutefois un certain nombre d'optimisations, inspirées des algorithmes de radiosité, peuvent être implémentés :

4.1.1.16 Facteur de forme

Un angle solide discrétisé représente un facteur géométrique unique entre deux patches (l'un considéré comme émetteur, l'autre comme récepteur). Il est donc assimilable au facteur de forme de la radiosité classique. Une optimisation en temps (pas en espace mémoire) peut donc consister à calculer une seule fois ce facteur lors de l'initialisation du calcul. On mémoriserait par exemple l'ensemble des angles solides élémentaires constituant un angle solide relatif à chaque couple émetteur/récepteur dans un vecteur mémoire.

4.1.1.17 Radiosité hiérarchique

On peut adapter le modèle de radiosité hiérarchique au calcul de la radiance pour simplifier le maillage de la scène et l'adapter à la répartition de la radiance. Pour cela il faut pouvoir définir un critère de "perturbation" de l'information sur un l'angle solide donné et pour un patch donné. Ce critère associé à une quantification de l'énergie transportée peut permettre de développer un oracle de décision pour la subdivision des patches.

4.1.1.18 Maillage de discontinuité

En ce qui concerne les zones d'ombre l'algorithme est le même que pour la radiosité [Bon98]. On peut alors se demander s'il ne serait pas utile d'établir un algorithme pour les zones de forte transition lumineuse comme par exemple pour une trace lumineuse due à une réflexion sur un sol. En théorie cela se présente comme pour les ombres mais les facteurs géométriques ne sont pas seuls à intervenir, il faut donc aussi tenir compte des caractéristiques des matériaux (en particulier de la BRDF). De plus il n'est pas réaliste de vouloir obtenir de transitions lumineuses franches grâce à notre modèle car il faudrait pour cela atteindre des résolutions d'angles solides assez fines pour se projeter sur un pixel, ce qui n'est pas envisageable même avec les plus "gros" ordinateurs actuels.

5 développements futurs

Dans un premier temps nous devons adapter les optimisations que nous venons de citer à notre modèle de résolution globale de la radiance. Nous pensons pouvoir aussi présenter prochainement un certains nombres de critères basés sur les caractéristiques des matériaux permettant d'adapter le maillage et l'ordre d'évaluation des transferts. Ces critères peuvent aussi permettre de prédire quel sont les transferts qui n'auront pas d'influence visible sur l'aspect du résultat et donc de ne pas les prendre en compte.

Une extension du modèle aux surfaces non planes est aussi envisageable en effectuant des transformations, plus ou moins empiriques sur les fonctions sphériques. En effet ce sont ces fonctions qui définissent la répartition de l'énergie dans la scène, donc en les déformant nous modifions la façon dont un patch redistribue son énergie.

Par la suite il peut être intéressant d'élargir le domaine de nos recherches non plus seulement au calcul d'images de synthèses mais aussi au calcul d'hologrammes de synthèses.

Expliquons nous :

Un hologramme est une "image" produite sur un film argentique classique par son exposition à deux flux d'énergie lumineuse cohérente provenant d'un laser. Un de ces flux atteint le film

sans être perturbé, il sert de référentiel. L'autre est retransmis et donc perturbé par la surface d'un objet. Cette "image" peut alors être vue en relief sous certaines conditions d'éclairage, ce qui signifie que l'information y est stocké de façon directionnelle.

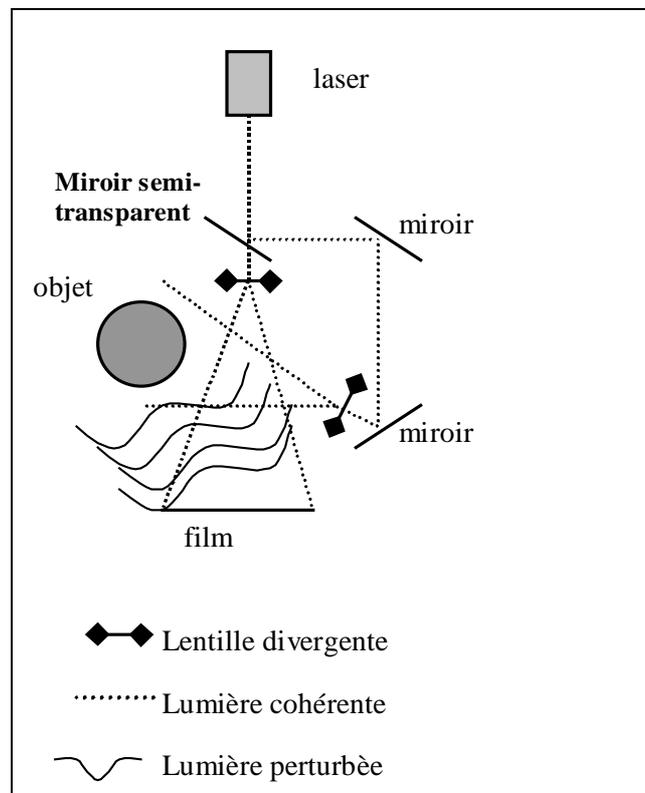


Figure 39 : hologramme

Un hologramme peut être schématiquement vu comme une vitre, c'est à dire que lorsque l'on regarde au travers d'un hologramme tout ce passe comme si l'on regardait l'objet au travers d'une fenêtre, on dit que l'on a l'image réelle d'un objet virtuel. On peut par exemple découper l'hologramme en deux comme si l'on obturait une partie de la fenêtre, l'objet sera alors toujours visible dans son intégralité au travers de chacun des morceaux. Au premier abord cela semble surprenant pourtant si l'on regarde au travers d'une partie seulement d'une fenêtre l'on n'est pas surpris de voir le paysage en entier !

Donc un hologramme se comporte comme une "image" de l'énergie directionnelle retransmise à la surface d'une vitre... C'est la radiance !

Une autre façon de voir les choses est de présenter un hologramme comme une surface dont on a restructuré la BRDF en chaque point de façon à ce que pour toute direction d'incidence on obtienne une unique réflectance proportionnelle à la radiance mesurée au même point sur une vitre.

Au vue de ces remarques il nous semble possible de générer à partir de notre modèle de radiance, des hologrammes de synthèses. Ceux-ci pouvant être visualisés par exemple grâce à un "holovideo", un écran holographique pour la première fois développé au Massachusetts Institute of Technology par Michael McKenna [McK92].

6 Conclusion

Nous avons vu que pour générer des images de synthèses photo réalistes il fallait se conformer à l'équation générale de rendu. Nous avons donc présenté dans ce document une méthode de calcul global de la radiance décomposée en éléments finis ainsi qu'une méthode de compression rendant ce modèle calculable. Les résultats obtenus, bien que nécessitant des temps de calculs importants, semblent satisfaisants et nous incitent donc à continuer dans cette voie. En particulier il paraît possible d'augmenter la vitesse de calcul par l'étude de quelques optimisations simples dérivées par exemple des méthodes de Radiosité.

Notre modèle permet de calculer l'illumination globale d'une scène virtuelle constituée de tout type de matériaux isotropes ou anisotropes, diffus ou spéculaires. Mais il ne prend pas encore en compte les matériaux transparents et les réfractions. De plus il n'est valide que pour des surfaces planes. Notre modèle pose donc un certain nombre d'hypothèses restrictives qui peuvent dans certains cas ne pas donner des solutions satisfaisantes. Une solution peut consister en une seconde passe en lancer de rayons réduit.

Enfin comme nous l'avons vu, un certain nombre d'erreurs sont commises lors de la résolution du système. De ce fait notre modèle, bien que garantissant un photo réalisme, ne peut assurer que l'image produite respecte exactement les paramètres donnés par l'utilisateur. Autrement dit, nous obtenons une image photo réaliste très proche, mais pas égale, à une photo réelle prise dans les mêmes conditions.

7 Références bibliographiques

- [Kaj86] James T. Kajiya. The rendering equation. *Computer Graphics*, 20(4) : 143-150, août 1986.
- [Sch95] Peter Schröder & Wim Sweldens. Spherical Wavelets : Efficiently Representing Functions on the Sphere. *Siggraph 25* : 161-172. Août 1995.
- [Rob99] Mathieu Robart. Doctorat . Thèse, université Paul Sabatier Toulouse. 1999.
- [Sill94] François X. Sillion & Claude Puech. *Radiosity & Global Illumination*. Livre. Ed Morgan Kaufmann Publishers. 1994
- [Pho75]. B.T Phong. Illumination for Computer Generated Pictures. *Communication of the ACM*, Vol 18(6) : 311-317. June 1975
- [Tor67] K. Torrance and E. Sparrow. Theory for off-specular reflection from roughened surfaces. *J. Opt. Soc. Amer No 57* : 1105-1114. 1967
- [Coo81]. R.L. Cook and K.E. Torrance. A reflectance model for computer graphics. *Computer Graphics* 15(3) : 307-316. 1981
- [Whi80] T. Whitted. An Improved Illumination Model for Shared Display. *Communications of ACM* 23(6) : 343-349. 1980
- [Gor84] C. M. Goral & K. E. Torrance & D. P. Greenberg & B. Battaile. Modeling the interaction of light between diffuse surfaces. *Computer Graphics* 18(3) : 213-222. 1984
- [Han91] P. Hanrahan & D. Saltzman & L. Aupperle. A rapid hierarchical radiosity algorithm. *Computer Graphics* 25(4) : 197-206. Aout 1991.
- [Pau95] M. Paulin. Algorithmes pour la radiosité : Parall lisme et  chantillonnage. Thèse, universit  Paul Sabatier Toulouse. 1995.
- [Lis92] D. Lischinski & F. Tamperri & D. Greenberg. Discontinuity messong for accurate radiosity. *IEEE Computer Graphics & Applications* 12(6) : 25-39. 1992
- [Bon98] V. Bonnafous. Maillage de discontinuité dynamique. DEA, universit  Paul Sabatier Toulouse. 1998
- [Sil89] F. Sillion & C. Puech. A general two-pass method integrating specular and diffuse reflection. *Computer Graphics* 23(3) : 335-344. 1989.
- [Shao88] M. Shao & Q Peng & Y. Liang. A new radiosity approach by procedural refinements for realistic image synthesis.
- [Gor93] S. Gortler & P. Schröder & M. Cohen & P. Hanrahan. Wavelet Radiosity. *Computer Graphics Annual Conference Series/ Siggraph* : 221-230. Août 1993.
- [Chr94] P.H. Christensen & E. j. Stollnitz & T. D. DeRose & D. H. Salesin. Wavelet Radiance. *Eurographics Workshop on Rendering 5* . 1994.
- [Sum94] Sumanta & Pattanaik & Bouatouch. Harr Wavelet : A Solution to Global Illumination With General Surface Properties : *Eurographics Workshop on Rendering 5* : 273-286. 1994.
- [Sch94] P.Schröder & P Hanrahan. Wavelet Methods for Radiance Computation. *Eurographics Workshop on Rendering 5* : 303-311. 1994.
- [Lal97] P. Lalonde & Alain Fournier. A Wavelet Representation of Reflectance Functions. Aout 1997.
- [McK92]. M. McKenna & D. Zeltzer. Tree Dimensional Visual Display Systems For Virtual Environments. *Teleoperators and Virtual Environments* 1(4) : 421-458. 1992.

Annexe

A. Ondelettes

Extrait de la these de Mathieu Robart [rob 99]

Les ondelettes font parties d'une famille d'outils mathématiques permettant de travailler sur des fonctions décomposées hiérarchiquement. Une fonction donnée (signal) peut alors être décomposé en un terme de signal moyen suivit d'une cascade de niveaux de détail. La transformée en ondelettes permet, comme la transformée de Fourier, d'effectuer une compression du signal en éliminant les coefficients les plus faibles (détails).....

L'utilisation d'un tel outil s'est d'abord développée en traitement du signal, puis en traitement d'image. Enfin, son utilisation s'est généralisée en synthèse d'image, que ce soit pour la compression de donnée, la radiométrie utilisant une base d'ondées, la modélisation multi-résolution d'objets 3D, etc.

Nous allons commencer cette étude par un exemple simple de famille d'ondelettes : la base de Haar. La construction de cette base montre clairement le fonctionnement de la décomposition d'une fonction en coefficient d'ondelettes et offre une meilleure compréhension de la généralisation des processus utilisés qui en découlera. Nous verrons ensuite comment formuler un algorithme de transformation, puis de compression de données.

Un exemple simple : la base de Haar

La base de Haar la base d'ondelette la plus simple. Nous allons voir comment décomposer une fonction en élément de cette base, ainsi que la construction proprement dite de la base.

Exemple de transformation

Nous allons supposer que nous travaillons sur le signal composé de 8 échantillons suivant (huit couleurs de pixels par exemple) :

7	3	4	2	8	6	1	9
---	---	---	---	---	---	---	---

Afin de représenter ce signal dans la base de Haar, nous allons lui faire subir certaines transformations. Le but du processus est de représenter ce signal sous forme d'une cascade de signaux à différentes échelles. Le signal d'origine est donc le signal possédant l'échelle la plus fine. Pour construire le signal à l'échelle suivante, nous allons juste calculer la moyenne deux-à-deux des valeurs du signal précédent. Ainsi, on obtient le signal à 4 échantillons suivant :

5	3	7	5
---	---	---	---

Le domaine couvert par chaque échantillon de ce nouveau signal couvre un intervalle deux fois plus large que ceux du signal d'échelle immédiatement supérieure. Mais nous avons ici perdu certaines informations au cours de la transformation. Afin de pouvoir reconstruire le signal d'origine, il faut également calculer les *coefficients de détails*, qui vont représenter le delta d'information qu'il faut ajouter au signal d'échelle plus grossière pour retrouver le signal d'origine. Ainsi, dans cet exemple, il faut ajouter et soustraire la valeur 2 au premier coefficient de valeur 5 pour retrouver les coefficients d'origine couvrant le même intervalle, c'est à dire les valeurs 7 et 3. Ainsi, nous pouvons décomposer le signal d'origine de 8 échantillons en deux nouveaux signaux de 4 échantillons chacun, le premier représentant une version grossière de l'origine (donc à une échelle plus grossière) et le second représentant les *détails* à rajouter pour la reconstruction :

7	3	4	2	8	6	1	9
---	---	---	---	---	---	---	---

5	3	7	5	2	1	1	-4
---	---	---	---	---	---	---	----

On peut ensuite répéter ce processus, récursivement, sur le signal moyen, et ainsi construire une cascade de signaux, chacun représentant le signal d'origine à différentes résolutions, accompagné du signal de détail correspondant. Ce processus se termine lorsque le signal moyen n'est plus composé que d'un seul coefficient. On remarque que pour réaliser une telle opération, le signal d'origine doit être composé de 2^n échantillons.

7	3	4	2	8	6	1	9
---	---	---	---	---	---	---	---

Signal d'origine

5	3	7	5	2	1	1	-4
---	---	---	---	---	---	---	----

Signal moyen 1 Coefficients de détails 1

4	6	1	1	2	1	1	-4
---	---	---	---	---	---	---	----

Signal moyen 2 Coef. de détails 2 Coef. de détails 1

5	-1	1	1	2	1	1	-4
---	----	---	---	---	---	---	----

Signal moyen 3 Coef. de détails 2
 Coef. de détails 3 Coeff de détails 1

Ainsi, la transformation par ondelettes du signal d'origine consiste en ce dernier coefficient, représentant la moyenne du signal complet, suivi de la cascade des signaux de détails selon chacune des résolutions croissantes. Le signal transformé devient donc :

5	-1	1	1	2	1	1	-4
---	----	---	---	---	---	---	----

On remarque que ce signal est composé du même nombre d'échantillons que celui d'origine. On peut maintenant reconstruire le signal à n'importe quelle résolution, en ajoutant successivement les divers coefficients de détails à une de ses versions en basse résolution.

Généralisation et Analyse multi-résolution

On peut considérer un signal comme celui de l'exemple précédent, sous la forme d'une fonction constante par morceaux, définie sur l'intervalle $[0,1)$. Une telle fonction appartient donc à l'espace vectoriel V composé de l'ensemble des fonctions constantes par morceaux. Cet espace peut être lui même décomposé en sous-espace plus spécifiques. Ainsi, l'ensemble des fonctions constantes à un seul coefficient (par conséquent, constantes sur tout l'intervalle $[0,1)$) forme un sous-espace de V que nous noterons V_0 . L'espace composé des fonctions constantes par morceaux à deux coefficients (le premier sur l'intervalle $[0,1/2)$ et le second sur l'intervalle $[1/2,1)$) sera noté V_1 , etc. Ainsi, on peut définir le sous-espace vectoriel V_j comme étant le sous-espace contenant l'ensemble des fonctions constantes par morceaux définies sur $[0,1)$, dont l'intervalle est divisé en 2^j morceaux égaux. Dans l'exemple précédent, le signal appartenant donc au sous-espace V_3 .

Tout signal à 2^j coefficient appartient à l'espace V_j . Or, il est défini sur l'intervalle unitaire et appartient donc à tout espace de résolution plus grande V_k (avec $k \geq j$). Par conséquent, les espaces V_j sont inclus les uns dans les autres :

$$V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset V_3 \subset \dots \subset V_j \subset V_{j+1} \subset \dots$$

Cette cascade d'espaces V_j est appelée *analyse multi-résolution*.

Il s'agit maintenant de définir une base pour chacun de ces espaces. De telles fonctions de base sont appelées *fonctions d'échelle* et sont notées ϕ .

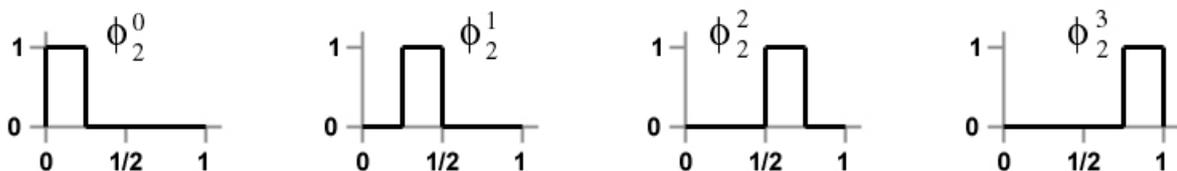
Dans le cas qui nous intéresse, celui des fonctions constantes par morceaux, une famille de fonction s'impose évidemment : la famille des fonction carrées. Ainsi, pour V_0 , une seule fonction est nécessaire, couvrant tout l'intervalle $[0,1)$. Pour l'espace V_1 , il nous faut définir deux fonctions de base, une pour chacun des deux demi-intervalles $[0,1/2)$ et $[1/2,1)$, et ainsi de suite pour chacun des V_j . On peut s'apercevoir que chacun de ces fonctions possède la même forme générale, mais couvre une partie différente de l'intervalle unitaire pour chacune des résolutions. On peut donc définir de manière générale la famille des fonctions de base ϕ :

$$\phi_j^i(x) = \phi(2^j x - i) \text{ avec } i = 0, \dots, 2^j - 1$$

où j représente l'échelle de la fonction et i son décalage sur l'intervalle. La fonction f sert de fonction de construction, définie comme :

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x \in [0,1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi, pour l'espace V_2 , on a les quatre fonction de base suivantes :



Afin de pouvoir projeter une fonction sur la base, il faut définir un produit scalaire :

$$\langle f | g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

pour deux éléments de V_j .

On peut maintenant définir un nouvel espace vectoriel W_j comme étant le *complément orthogonal* de l'espace V_j dans V_{j+1} . En effet, toute fonction de V_j appartient également à V_{j+1} par construction, mais cela ne signifie par que toutes les fonctions de V_{j+1} sont des fonctions de V_j (dans un tel cas, les deux espaces seraient égaux). Ainsi, l'espace W_j contient toutes les

fonctions de V_{j+1} n'appartenant pas à V_j (fonctions *orthogonales* à toutes les fonctions de V_j selon le produit scalaire). Par définition, nous avons :

$$V_j \oplus W_j = V_{j+1}$$

L'ensemble de ces fonctions $\psi_j^i(x)$ composants W_j sont appelées *ondelettes*. Ce sont ces fonctions qui vont servir de bases aux signaux de détails. En effet, elles vont permettre de représenter l'information de V_{j+1} qui ne peut être représentée dans V_j . Par conséquent, les coefficients de détails que nous avons calculé dans l'exemple précédent ne sont en fait que les coefficients d'ondelettes.

Ces fonctions de base possèdent deux propriétés importantes :

les fonctions de base ψ_j^i de W_j , associées aux fonctions de base ϕ_j^i de V_j , forment une base pour l'espace V_{j+1} ,

chaque fonction de base ψ_j^i de W_j est orthogonale à toute fonction de base ϕ_j^i de V_j .

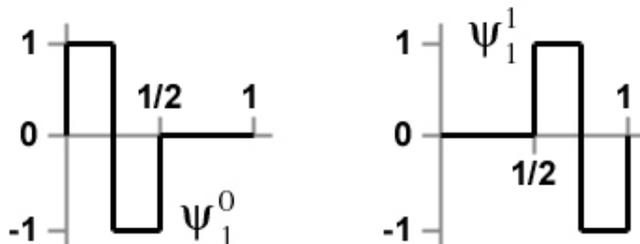
Les ondelettes correspondant aux fonctions de base carrées sont connues sous le nom d'*ondelettes de Haar*, définies comme :

$$\psi_j^i(x) = \psi(2^j x - i) \quad \text{avec } i = 0, \dots, 2^j$$

où :

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 \leq x < 1/2 \\ -1 & \text{pour } 1/2 \leq x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi, pour W_1 , on a les deux ondelettes de base suivantes :

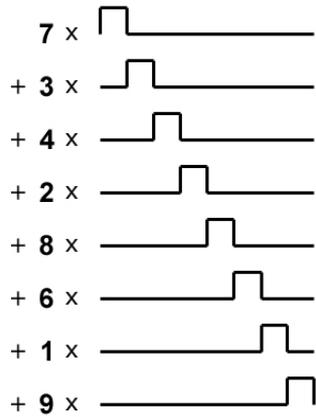


Appliquons maintenant cette théorie à notre exemple précédent.

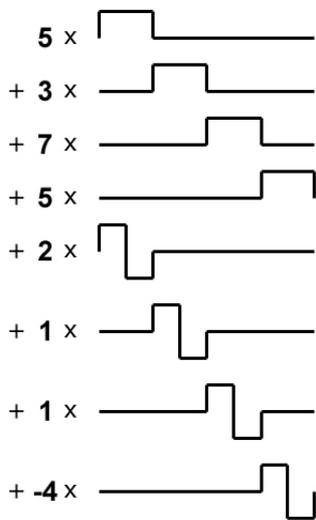
Le signal d'origine est composé de 8 coefficients et appartient donc à V_3 . Il peut donc être projeté sur la base de cet espace et être réécrit sous la forme :

$$f(x) = c_3^0 \phi_3^0(x) + c_3^1 \phi_3^1(x) + c_3^2 \phi_3^2(x) + c_3^3 \phi_3^3(x) + c_3^4 \phi_3^4(x) + c_3^5 \phi_3^5(x) + c_3^6 \phi_3^6(x) + c_3^7 \phi_3^7(x)$$

où les coefficients c_j^i sont les valeurs des échantillons du signal. On peut donc représenter graphiquement la fonction d'origine comme :

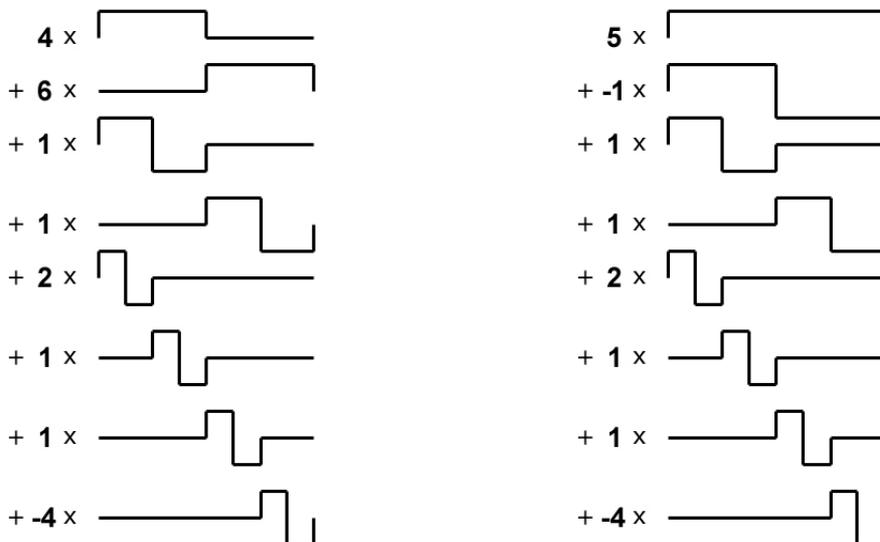


Le signal f appartient à V_3 , donc il appartient à $V_2 \oplus W_2$. Il peut donc être réécrit comme la somme pondérée de 4 fonctions d'échelles et de 4 ondelettes :



On retrouve bien les coefficients calculés dans la première partie.

On peut répéter le processus jusqu'à son terme et écrire la fonction f comme la somme pondérée d'une fonction d'échelle de V_0 et d'ondelettes de W_0 , W_1 et W_2 :



Les 8 coefficient finaux sont les *coefficients de Haar*.

Si nous regardons mieux la définition de ces fonctions de base, nous voyons qu'elles ne sont pas normalisées (il suffit pour cela de calculer le produit scalaire d'une des fonctions de base avec elle même pour voir que le résultat est différent de 1). En fait, il faut intégrer un facteur normalisateur dans leur définition. Ainsi, une fonction d'échelle et une ondelette pour une résolution j s'écrivent :

$$\begin{aligned}\phi_j^i &= 2^{j/2} \phi(2^j x - i) \\ \psi_j^i &= 2^{j/2} \psi(2^j x - i)\end{aligned}$$

Les coefficients s'en trouvent modifiés, mais le principe reste absolument le même.

Généralisation

L'analyse *temps-échelle* ou *espace-échelle* dans le cas d'une image, consiste à utiliser une gamme très étendue d'échelles pour analyser un signal. Cette notion d'échelle signifie que le signal sera, à une échelle donnée, remplacé par l'approximation la plus fidèle que l'on puisse fournir à cette échelle. Il s'agit alors de formuler ce qui diffère d'une échelle à l'autre, c'est-à-dire les *détails* qui permettent, en corrigeant une approximation encore grossière, d'accéder à une représentation de meilleur qualité.

Ce schéma algorithmique est appelé *analyse multi-résolution* et équivaut à une décomposition atomique, où les atomes sont les ondelettes.

Le signal à analyser appartient à l'espace vectoriel V_j et possède 2^j échantillons. Nous avons vu que nous pouvions décomposer cet espace en deux sous-espaces orthogonaux, V_{j-1} et W_{j-1} , tels que :

$$V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1}$$

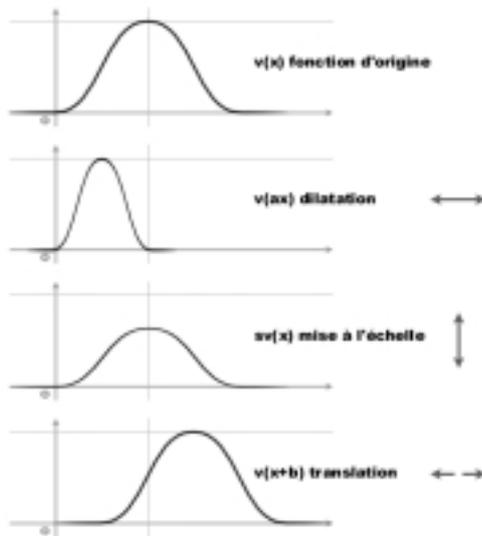
On peut ainsi définir une cascade de sous-espaces, dont la composition reconstruit l'espace initial V_j :

$$V_j = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_{j-1}$$

Nous allons définir, pour chacun de ses espaces, une base de fonctions permettant de représenter toute fonction leur appartenant. Ces fonctions de base sont appelées *fonctions d'échelles* ϕ_k pour les espaces V_k , et *ondelettes* ψ_k pour les espaces W_k . Leur construction suit le même schéma : chacune de ces fonctions de base est construite à partir d'une même fonction de départ, ayant subi une série de transformations. Ces transformations sont au nombre de trois :

dilatation,
homothétie ou mise à l'échelle,
translation.

Elles peuvent se résumer par la figure suivante :



Pour les ondelettes, la fonction de base s'appelle *ondelette mère* ψ . Les autres ondelettes seront donc identique à celle-ci, mais de support plus restreint (par dilatation), d'amplitude différente (par homothétie) et décalés sur l'intervalle (par translation). Ainsi, la forme générale d'une ondelette est donnée par :

$$\psi_a^b(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

où a représente la dilatation de l'ondelette et b sa position sur l'intervalle.

Fonction de dilatation et décomposition

Un signal appartenant à l'espace V_j possède 2^j coefficients. Le signal de résolution immédiatement inférieur appartient à V_{j-1} et possède donc 2^{j-1} coefficients. Le nouveau signal possède deux fois moins d'informations que le précédent et peut par conséquent être échantillonné à une fréquence deux fois plus faible. Ainsi, les fonctions de base de l'espace V_{j-1} doivent avoir un support deux fois plus large que celle de la résolution suivante. On peut donc choisir un facteur de dilatation égal à 2 entre deux résolutions consécutives.

A partir de cette constatation, les fonctions d'échelle et les ondelettes se construisent à partir de leur fonction mère selon la formule suivante :

$$\begin{aligned} \phi_j^i(t) &= 2^{j/2} \phi(2^j t - i) \\ \psi_j^i(t) &= 2^{j/2} \psi(2^j t - i) \end{aligned}$$

avec t appartenant à l'intervalle $[0,1]$. On retrouve bien l'expression générale des ondelettes, avec le facteur $a = 2^{-j}$. L'indice j représente la résolution de la fonction de base et l'indice i représente sa translation sur le support, prenant une valeur entre 0 et 2^j-1 .

Ainsi, on remarque :

la fonction $\phi_j^i(t)$ est identique à $\phi_{j-1}^i(t)$, à la différence près que $\phi_{j-1}^i(t)$ possède un support deux fois plus large et une amplitude $1/\sqrt{2}$ plus haute.

la fonction $\phi_j^i(t)$ est identique à $\phi_j^{i+1}(t)$, à une translation près.

Cette collection de fonction de base forme une base orthonormée. Cela signifie que tout signal d'énergie finie peut s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire d'ondelettes $\psi_j^i(t)$ et que les coefficients de cette combinaison sont calculé par produit scalaire entre la fonction de base correspondante et la fonction d'origine.

Il est essentiel de remarquer que les fonctions $\phi_{j-1}^i(t)$ et $\psi_{j-1}^i(t)$ appartiennent toutes les deux au même espace V_j . Par conséquent, elles peut toutes les deux s'écrire comme une combinaison linéaire des fonctions de base de cet espace, les fonctions $\phi_j^i(t)$. Par conséquent, on peut définir une relation liant une fonction d'échelle ou une ondelette d'une résolution $j-1$, avec les fonctions d'échelle du niveau immédiatement supérieur j comme étant :

$$\begin{aligned}\phi_{j-1}^i(t) &= \sum_k h_{j-1}^{i,k} \phi_j^k(t) \\ \psi_{j-1}^i(t) &= \sum_k g_{j-1}^{i,k} \phi_j^k(t)\end{aligned}$$

Ainsi, les fonctions d'échelle ou les ondelettes d'un niveau grossier peuvent être écrites comme la combinaison linéaire des fonction d'échelle d'un niveau plus fin. L'analyse multi-résolution nous permet alors d'écrire une fonction f de l'espace V_j sous la forme :

$$\begin{aligned}f(t) &= \sum_{i=0}^{2^{j-1}} c_j^i \phi_j^i(t) \in V_j \\ &= \sum_{i=0}^{2^{j-1}-1} c_{j-1}^i \phi_{j-1}^i(t) + \sum_{i=0}^{2^{j-1}-1} d_{j-1}^i \psi_{j-1}^i(t) \in V_{j-1} \oplus W_{j-1} \\ &= K \\ &= c_0^0 \phi_0^0(t) + \sum_{k=0}^{j-1} \sum_{i=0}^{2^k-1} d_k^i \psi_k^i(t) \in V_0 \oplus W_0 \oplus K \oplus W_{j-1}\end{aligned}$$

Cette décomposition peut s'écrire, grâce aux équations de dilatations :

$$\begin{aligned}f(t) &= \sum_{i=0}^{2^{j-1}} c_j^i \phi_j^i(t) \\ &= \sum_{i=0}^{2^{j-1}-1} c_{j-1}^i \phi_{j-1}^i(t) + \sum_{i=0}^{2^{j-1}-1} d_{j-1}^i \psi_{j-1}^i(t) \\ &= \sum_{i=0}^{2^{j-1}-1} c_{j-1}^i \left(\sum_{k=0}^{2^{j-1}} h_{j-1}^{i,k} \phi_j^k(t) \right) + \sum_{i=0}^{2^{j-1}-1} d_{j-1}^i \left(\sum_{k=0}^{2^{j-1}} g_{j-1}^{i,k} \psi_j^k(t) \right) \\ &= K \\ &= \sum_{k=0}^{2^{j-1}} \phi_j^k(t) \left[\sum_{l=0}^{2^{j-1}-1} c_{j-1}^l h_{j-1}^{l,k} + \sum_{l=0}^{2^{j-1}-1} d_{j-1}^l g_{j-1}^{l,k} \right]\end{aligned}$$

Grâce à cette décomposition, on peut calculer les valeurs de c_{j-1}^i et d_{j-1}^i , car on connaît les coefficients des filtres h et g , ainsi que les valeurs c_j^i qui sont les valeurs du signal d'origine. Ainsi, on a :

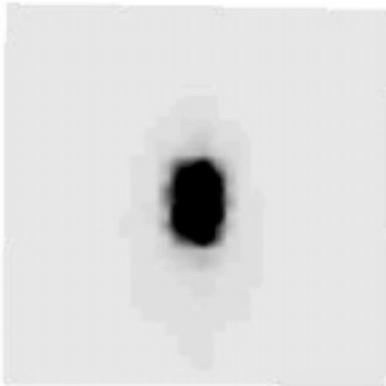
$$\sum_{l=0}^{2^{j-1}-1} c_{j-1}^l h_{j-1}^{l,k} + \sum_{l=0}^{2^{j-1}-1} d_{j-1}^l g_{j-1}^{l,k} = c_j^k$$

B. Planches de test

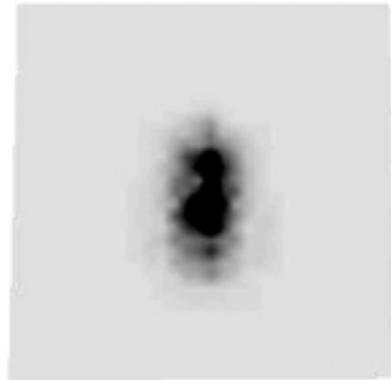
Influence de la résolution de la BRDF et des réflectances sur la redistribution de l'énergie.

Modèle utilisé : Cook-Torrance

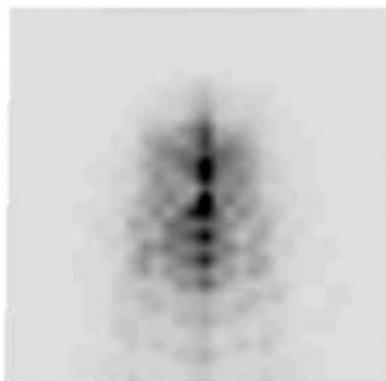
(nous présentons des négatifs pour une meilleur visualisation)



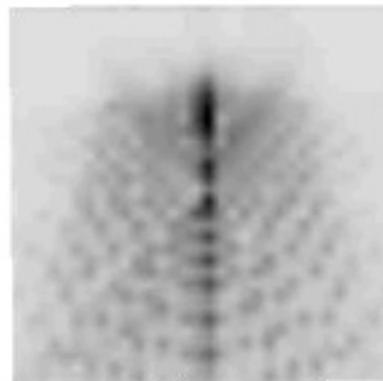
Résolution BRDF 5 Réflectance 5



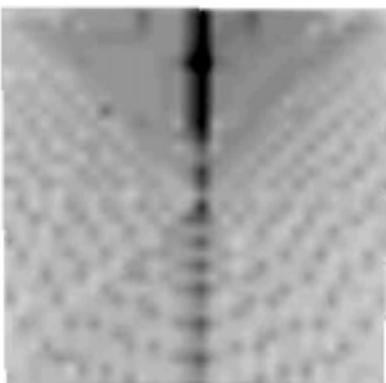
Résolution BRDF 5 Réflectance 4



Résolution BRDF 5 Réflectance 3



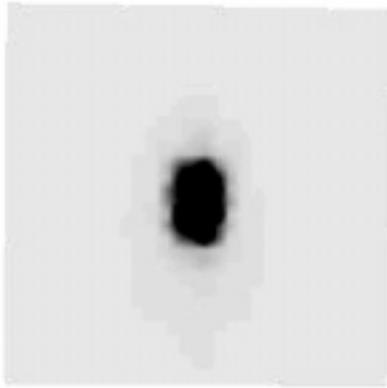
Résolution BRDF 5 Réflectance 2



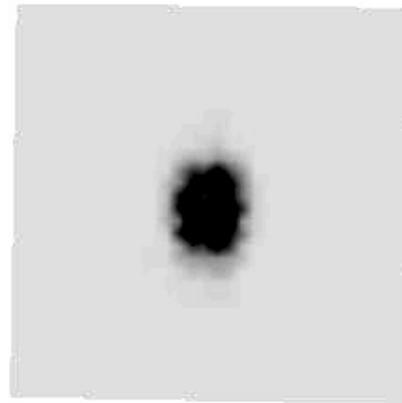
Résolution BRDF 5 Réflectance 1



Résolution BRDF 5 Réflectance 0



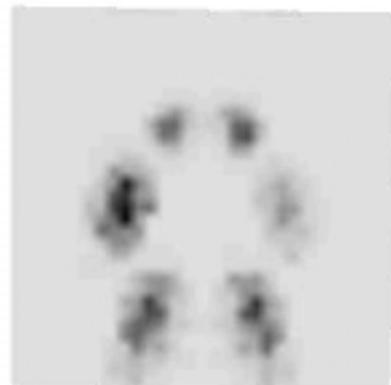
Résolution BRDF 5 Réflectance 5



Résolution BRDF 4 Réflectance5



Résolution BRDF 3 Réflectance5



Résolution BRDF 2 Réflectance5



Résolution BRDF 1 Réflectance5



Résolution BRDF 0 Réflectance5

C. résultats

